

# Tentamen

## TNA001 – Matematisk grundkurs

Datum: 2011-10-17  
Tid: 08.00 – 13.00  
Kurskod: TNA001  
Provkod: TEN1  
Institution: ITN  
Examinator: Sixten Nilsson  
Hjälpmedel: Inga, förutom skriv- och ritmateriel

### Bedömningsgrunder och beskrivning av vad som menas med en fullständig lösning

Uppgifterna på denna tentamen bedöms genom att varje uppgift poängsätts med 0 - 6 poäng. Om inte annat framgår av texten, skall **fullständig lösning** lämnas. Med detta menas att följande moment skall i *lämplig omfattning* ingå i lösningen:

1. Lösningen skall ha förklarande text med förklaringar på vad som görs och varför det får göras. En hänvisning till teorin kan här vara lämpligt. Även en figur kan vara ett bra stöd i detta arbete.
2. Lösningen skall ha en struktur som är lätt att följa.
3. Lösningen skall innehålla en kalkyl del där det går att följa hur resultaten har uppkommit.
4. Lösningen skall ha ett tydligt angivet svar/resultat som är kopplat till den fråga som är ställd.
5. Svaret/resultatet skall där så är lämpligt utvärderas, dvs. prövningar skall genomföras som säkrar resultatet

Poängsättningen vid rättningen tar hänsyn till hur väl samtliga delar ovan är genomförda.

### Betyg

Betyg	Poäng på tentamen (inklusive bonuspoäng)
5	$\geq 36$ , varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
4	28 – 35, varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
3	20 – 27, varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
U	0 – 19

Lösningsskisser kommer att finnas på kurshemsidan <http://webstaff.itn.liu.se/~sixni/TNA001.htm> i samband med tentamenstidens slut.

1. a) Vilka reella tal  $x$  uppfyller villkoret

$$x - 1 \leq \frac{2}{x}?$$

- b) Lös ekvationen

$$|2x - 1| - x = |x + 2|.$$

2. a) Illustrera i en figur med enhetscirkeln att  $\sin(\pi - v) = \sin v$ . Kommentera figuren på lämpligt sätt.

- b) Bestäm alla lösningar till ekvationen

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

3. (ON-bas)

Planet  $\Pi$  innehåller origo och är parallellt med de båda vektorerna  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  och  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

- a) Visa att en ekvation för planet  $\Pi$  är  $x - 2y + z = 0$ .

- b) Bestäm skärningspunkten mellan planet  $\Pi$  och linjen  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

- c) Då punkten  $P = (1, 0, -2)$  speglas i planet  $\Pi$  blir dess spegelbild punkten  $S$ . Bestäm koordinaterna för  $S$ . För full poäng på c)-uppgiften krävs att du ritar en relevant figur.

*Anm:* I uppgifterna b) och c) får du använda  $\Pi$ 's ekvation från a)-uppgiften även om du inte lyckats visa den.

4. a) Bestäm alla reella lösningar till ekvationen

$$2 \ln x + \ln(x + 4) = \ln(5x).$$

- b) Härled potensräkneregeln  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$  för  $a > 0$  och  $x, y \in \mathbb{R}$ , genom att använda lämpliga logaritmlagar. *Ledning:* Utnyttja bl.a. att om  $\ln b = \ln c$  så är  $b = c$  eftersom  $\ln$ -funktionen är omvändbar.

5. a) Beräkna  $(3 - i3\sqrt{3})^{15}$ . Ange svaret på formen  $x + iy$  där  $x \in \mathbb{R}$  och  $y \in \mathbb{R}$ .

- b) Använd definitionen av den komplexa exponentialfunktionen,  $e^{ix}$ , och dess konjugat,  $e^{-ix}$ , för att visa att

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

- c) Utnyttja formeln i b)-uppgiften och visa att

$$4 \sin^3 x = 3 \sin x - \sin 3x.$$

*Anm:* I uppgift c) får du använda formeln i b) även om du inte lyckats visa den.

6. Visa att

$$\sum_{k=1}^n (4k^3 - 3k^2 + k + 1) = n^4 + n^3 + n$$

för alla  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

7. Funktionen  $f(x) = \cos 2x - 4 \cos x$ ,  $x \in [0, \pi] = D_f$ , är strängt växande på sin definitionsmängd. Bestäm inversen  $f^{-1}$  till denna funktion inklusive inversens definitionsmängd.