

Tentamen

TNA001 – Matematisk grundkurs

Datum: 2009-10-16
Tid: 08.00 – 13.00
Kurskod: TNA001
Provkod: TEN1
Institution: ITN
Examinator: Sixten Nilsson
Hjälpmedel: Inga, förutom skriv- och ritmateriel

Bedömningsgrunder och beskrivning av vad som menas med en fullständig lösning

Uppgifterna på denna tentamen bedöms genom att varje uppgift poängsätts med 0 - 6 poäng. Om inte annat framgår av texten, skall **fullständig lösning** lämnas. Med detta menas att följande moment skall i *lämplig omfattning* ingå i lösningen:

1. Lösningen skall ha förklarande text med förklaringar på vad som görs och varför det får göras. En hänvisning till teorin kan här vara lämpligt. Även en figur kan vara ett bra stöd i detta arbete.
2. Lösningen skall ha en struktur som är lätt att följa.
3. Lösningen skall innehålla en kalkyldel där det går att följa hur resultaten har uppkommit.
4. Lösningen skall ha ett tydligt angivet svar/resultat som är kopplat till den fråga som är ställd.
5. Svaret/resultatet skall där så är lämpligt utvärderas, dvs. prövningar skall genomföras som säkrar resultatet

Poängsättningen vid rättningen tar hänsyn till hur väl samtliga delar ovan är genomförda.

Betyg

Betyg	Poäng på tentamen (inklusive bonuspoäng)
5	≥ 36 , varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
4	28 – 35, varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
3	20 – 27, varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
U	0 – 19

Lösningsskisser kommer att skickas via e-post efter tentamenstidens slut till alla som är kursregistrerade.

1. a) Sambanden $\sin(-v) = -\sin v$ och $\cos(-v) = \cos v$ gäller som bekant för alla reella tal v . Illustrera de båda sambanden i en figur för $0 < v < \frac{\pi}{2}$. Kommentera figuren på något lämpligt sätt.
- b) Visa med hjälp av additionssatsen för sinus att $\sin 2v = 2\sin v \cos v$.
- c) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen $\sin(-2x) = \cos x$.

2. I en ON-bas har linjen L framställningen $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 0 - t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$, och planet Π har ekvationen

$$2x - 3y + z = 0.$$

- a) Bestäm linjens skärningspunkt med planet.
- b) Bestäm avståndet mellan punkten $P = (1, 0, -1)$ och planet Π .
3. a) Antag att funktionen f är omvändbar och att den alltså har en invers f^{-1} . Ange minst två egenskaper som då gäller för f och f^{-1} .
- b) Har funktionen $g(x) = (x-1)^2 - 1$ invers? Bestäm den i så fall och ange inversens definitionsmängd. Om invers inte existerar skall du motivera varför.
- c) Har funktionen $h(x) = \ln(3x-4)$ invers? Bestäm den i så fall och ange inversens definitionsmängd. Om invers inte existerar skall du motivera varför.

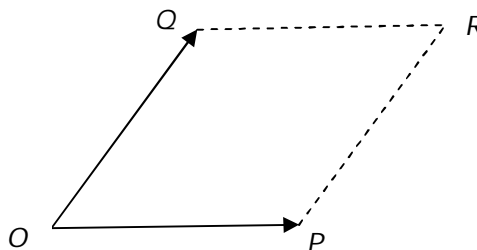
4. Låt $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$ och $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ vara två komplexa tal.

a) Beräkna $(z_1)^6 \cdot (z_2)^3$. Ange svaret på formen $x + iy, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$.

b) Låt $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ (d.v.s. som ovan). Markera i det komplexa talplanet alla komplexa tal z som uppfyller villkoret $\left| z - \frac{z_2}{\sqrt{2}} \right| \leq \sqrt{2}$.

5. a) Bestäm definitionsmängden till $f(x) = \ln(x^2 - 4) - \ln(x+2)$ och bestäm alla reella tal x som är lösning till ekvationen $f(x) = 0$.
- b) Bestäm alla reella tal x som uppfyller olikheten $\ln|x^2 - 4| - \ln(x+2) \leq 0$.

6. En romb är en fyrhörning med alla sidor lika långa. I figuren bildar \overrightarrow{OP} och \overrightarrow{OQ} sidorna i romben $OPRQ$. Visa att rombens diagonaler är vinkelräta mot varandra.



7. Bevisa att $\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+2+3+\dots+k} = \frac{2n}{n+1}$ för alla $n \in \mathbf{Z}^+$.