

TNA001- Matematisk grundkurs
Tentamen 2008-10-15
Lösningsskiss

1. a) Se kursboken.

$$b) 2 \sin^2 x + 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x + \frac{3}{2} \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$/sätt t = \sin x / \Leftrightarrow t^2 + \frac{3}{2}t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \text{ eller } t = \frac{1}{2}.$$

För $t = -2$ har vi ekvationen $\sin x = -2$, som saknar lösning.

$$\text{För } t = \frac{1}{2} \text{ har vi ekvationen } \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + n2\pi \\ \text{eller} \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + n2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + n2\pi \\ \text{eller} \\ x = \frac{5\pi}{6} + n2\pi \end{cases}$$

$$\text{Svar: } x = \frac{\pi}{6} + n2\pi \text{ eller } x = \frac{5\pi}{6} + n2\pi, n \in \mathbf{Z}.$$

2. a) $f(x) = \ln(x^2 - 4) + \ln(x - 1)$ är definierad om $x^2 - 4 > 0$ och $x - 1 > 0$.

$$\text{Vi har } x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]2, \infty[,$$

$$\text{och } x - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in]1, \infty[$$

Båda olikheterna är alltså uppfyllda om $x \in]2, \infty[$.

$$\text{Svar: } D_f =]2, \infty[$$

$$b) f(x) = \ln 6 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 4) + \ln(x - 1) = \ln 6.$$

Enligt ovan är ekvationens vänstra led definierat om $x > 2$.

Vi har

$$\ln(x^2 - 4) + \ln(x - 1) = \ln 6 \Rightarrow \ln((x^2 - 4)(x - 1)) = \ln 6 \Leftrightarrow$$

$$/ \text{ty } \ln \text{-funktionen är omvändbar} / \Leftrightarrow$$

$$(x^2 - 4)(x - 1) = 6 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 4x - 2 = 0.$$

Eftersom $x = -1$ är ett nollställe till denna ekvation får vi, via faktorsatsen och polynomdivision, att ekvationen är ekvivalent med

$$(x + 1)(x^2 - 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ eller } x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = -1 \text{ eller } x = 1 + \sqrt{3} \text{ eller } x = 1 - \sqrt{3}.$$

Men $x = -1 < 2$ och $x = 1 - \sqrt{3} < 1 - 1 = 0 < 2$. Däremot har vi $1 + \sqrt{3} > 1 + 1 = 2$ så $x = 1 + \sqrt{3}$ är lösning.

$$\text{Svar: } x = 1 + \sqrt{3}$$

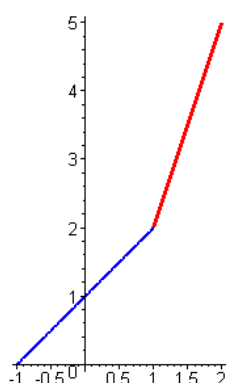
3. a) $2f(x) = 3$ motsvarar ekvationen $2|x - 1| + 4x = 3$

Eftersom $|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{om } x \geq 1 \\ 1 - x & \text{om } x \leq 1 \end{cases}$ får vi två olika fall, som sammanställs i följande tabell:

$I_1: -1 \leq x \leq 1$	$I_2: 1 \leq x \leq 2$
$2(1-x) + 4x = 3 \Leftrightarrow 2 - 2x + 4x = 3 \Leftrightarrow$	$2(x-1) + 4x = 3 \Leftrightarrow 2x - 2 + 4x = 3 \Leftrightarrow$
$2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \in I_1,$	$6x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{6} \notin I_2,$
så $x = \frac{1}{2}$ är en lösning.	så ekvationen saknar lösning i detta intervall.

Svar: $x = \frac{1}{2}$

b) Vi har $f(x) = |x-1| + 2x = \begin{cases} 1-x+2x = x+1 & \text{om } -1 \leq x \leq 1 \\ x-1+2x = 3x-1 & \text{om } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Vi ritar grafen i respektive intervall:



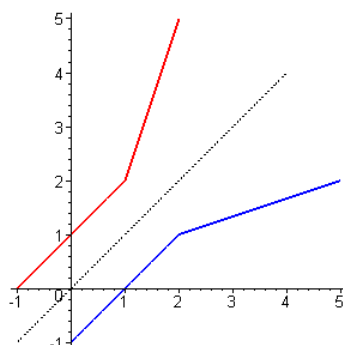
c) För $-1 \leq x \leq 1$ har vi $f(x) = y = x + 1 \Leftrightarrow x = y - 1$. Eftersom f är strängt växande har vi här att $y \in [-1+1, 1+1] = [0, 2]$, d.v.s. på detta intervall har f invers med $f^{-1}(x) = x - 1, D_{f^{-1}} = [0, 2]$.

För $1 \leq x \leq 2$ har vi $f(x) = y = 3x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{3}$. Eftersom f är strängt växande har vi här att $y \in [3 \cdot 1 - 1, 3 \cdot 2 - 1] = [2, 5]$, d.v.s. på detta intervall har f invers med $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}, D_{f^{-1}} = [2, 5]$

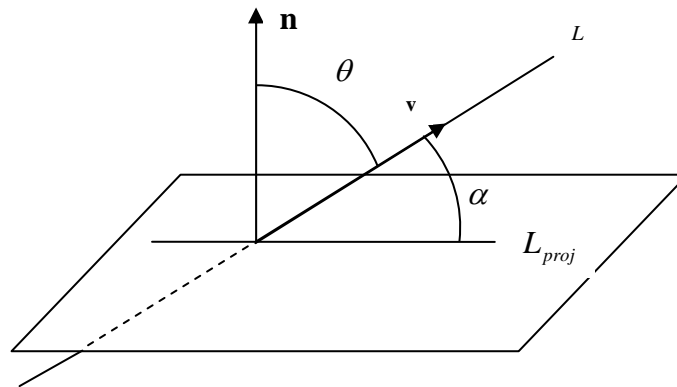
Vi observerar att $f^{-1}(2) = 1$ i båda fallen och därmed har vi $f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1 & \text{om } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{x+1}{3} & \text{om } 2 < x \leq 5 \end{cases}$.

Svar: $f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1 & \text{om } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{x+1}{3} & \text{om } 2 < x \leq 5 \end{cases}$

Anm: Som kontroll till c)-uppgiften ritar vi graferna $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$ och $y = x$ i samma koordinatsystem.



4. Först en skiss som kan användas till deluppgifterna a) och b).



a) Linjens ekvation insatt i planets ger

$$1 - (-1 - t) + 2(1 + t) = 13 \Leftrightarrow t = 3,$$

som insatt i linjens ekvation ger skärningspunkten $(1, -1 - 3, 1 + 3) = (1, -4, 4)$.

Svar: Skärningspunkt i $(1, -4, 4)$.

b) Vi söker vinkeln α i figuren och beräknar därför först vinkeln θ mellan planets

normalvektor $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och linjens riktningsvektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vi har

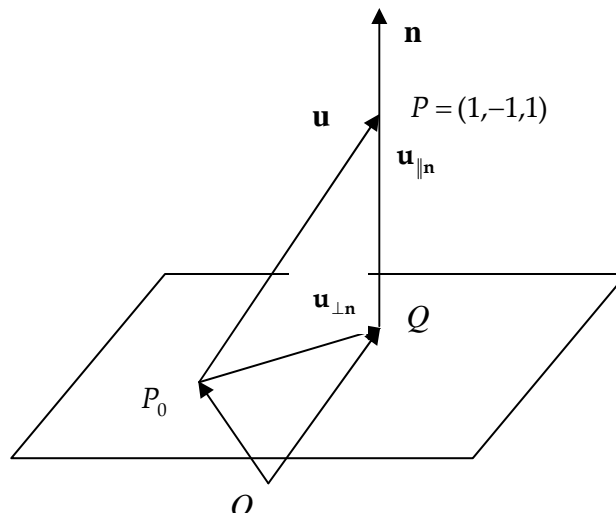
$$\cos \theta = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1+1+4} \cdot \sqrt{0+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6},$$

och alltså har vi

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Svar: Vinkeln mellan linjen och planet är $\frac{\pi}{3}$.

c) Skiss.



Låt Q vara den ortogonala projektionen av punkten P på planet. Eftersom origo inte ligger i planet tar vi en godtycklig punkt P_0 i planet.

$$\text{Låt } P_0 = (13, 0, 0) \text{ och } \mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Figuren ger oss att $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} - \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP_0} + \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\parallel n}$, där vi av projektionsformeln har att

$$\mathbf{u}_{\parallel n} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2} \right) \mathbf{n} = \frac{\begin{pmatrix} -12 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{-12 + 1 + 2}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{-9}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alltså } \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}, \text{ d.v.s. } Q = \left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{8}{2} \right).$$

Svar: Punkten $\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{8}{2} \right)$

5. a) Med $z = \sqrt{3} + i$ har vi $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$. Om $\arg z = v$ har vi (t.ex.)
 $\tan v = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow v = \frac{\pi}{6}$, så vi kan välja $\arg z = \frac{\pi}{6}$ (eller vilken som helst av $\frac{\pi}{6} + n2\pi, n \in \mathbf{Z}$).

Svar: $|z| = 2$, $\arg z = \frac{\pi}{6}$

$$\text{b) } z^{15} = (\sqrt{3} + i)^{15} = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}} \right)^{15} = 2^{15} e^{i\frac{15\pi}{6}} = 2^{15} e^{i\left(\frac{12\pi+3\pi}{6}\right)} = 2^{15} e^{i\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)} = 2^{15} \underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{=i} = 2^{15} i$$

Svar: $z^{15} = 2^{15} i$

c) Låt $u = x + iy \Rightarrow$

$$|u - z| = 2|u - i| \Leftrightarrow |x + iy - (\sqrt{3} + i)| = 2|x + iy - i| \Leftrightarrow |(x - \sqrt{3}) + (y - 1)i| = 2|x + (y - 1)i| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x - \sqrt{3})^2 + (y - 1)^2} = 2\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \Leftrightarrow (x - \sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 = 4(x^2 + (y - 1)^2) \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 4x^2 + 3(y - 1)^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 2\sqrt{3}x + 3(y - 1)^2 = 3 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + (y - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(x + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 - \frac{3}{9} + (y - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{12}{9} = \frac{4}{3},$$

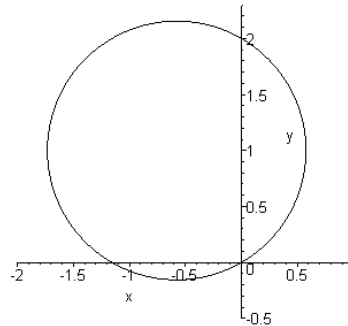
vilket motsvarar en cirkel med medelpunkt i $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1 \right)$ och radie $\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

$u = 0$ ger ekvationens VL $= |0 - z| = |-z| = |z| = 2$, och dess

HL $= 2|0 - i| = 2|-i| = 2|i| = 2 \cdot 1 = 2$, d.v.s. $u = 0$ uppfyller ekvationen.

Svar: Alla komplexa tal i det komplexa talplanet som ligger på en cirkel med medelpunkt i $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ och radie $\frac{2}{\sqrt{3}}$, d.v.s. alla komplexa tal u som uppfyller villkoret

$$\left|u - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} + i\right)\right| = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ (se figur).}$$



6. a) Planet $x + y + z = 3$ har en normalvektor $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ och

$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ är parallella med det andra planet och är sinsemellan ickeparallella. Dessa

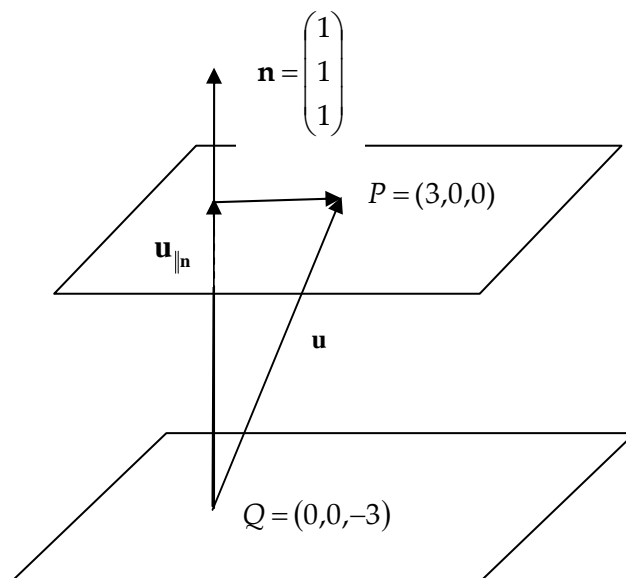
vektorer spänner alltså upp det andra planet. \mathbf{n} är vinkelrät mot både \mathbf{v}_1 och \mathbf{v}_2 , ty

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \text{ och } \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0. \text{ Det innebär att de båda planen har}$$

parallella normalvektorer, vilket innebär att planen är parallella, v.s.v.

b) Eftersom planen är parallella kan vi välja $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ som normal till båda planen. Vi

bestämmer en godtycklig punkt i vardera planet, och väljer $P = (3,0,0)$ i det förra planet och $Q = (0,0,-3)$ i det senare, se figur.



$$\text{Låt } \mathbf{u} = \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Det sökta avståndet mellan planen ges av $|\mathbf{u}_{\parallel \mathbf{n}}|$. Projektionsformeln ger oss

$$\mathbf{u}_{\parallel \mathbf{n}} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2} \right) \mathbf{n} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3+0+3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Det sökta avståndet mellan planen är alltså $|\mathbf{u}_{\parallel \mathbf{n}}| = 2\sqrt{3}$ i.e.

Svar: $2\sqrt{3}$

7. Vi ska bevisa att $P(n): V(n) = \sum_{k=1}^n aq^{k-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ gäller för alla $n \in \mathbf{Z}^+$

Vi väljer ett induktionsbevis:

$$\text{STEG 1: } P(1): V(1) = \sum_{k=1}^1 aq^{k-1} = aq^0 = a, \quad H(1) = \frac{a(1-q^1)}{1-q} = a$$

Alltså $V(1) = H(1)$ d. v. s. $P(1)$ gäller.

STEG 2: Vi antar att $P(p)$ gäller för godtyckligt fixt tal $p \in \mathbf{Z}^+$, d.v.s. vi antar att

$$V(p) = \sum_{k=1}^p aq^{k-1} = \frac{a(1-q^p)}{1-q}$$

Detta medför att

$$\begin{aligned} V(p+1) &= \sum_{k=1}^{p+1} aq^{k-1} = \sum_{k=1}^p aq^{k-1} + aq^{(p+1)-1} = / \text{enligt antagandet} / = \\ &= \frac{a(1-q^p)}{1-q} + aq^p = \frac{a(1-q^p) + aq^p(1-q)}{1-q} = \frac{a - aq^p + aq^p - aq^{p+1}}{1-q} = \\ &= \frac{a(1-q^{p+1})}{1-q} = H(p+1) \end{aligned}$$

$$\text{d.v.s. } V(p) = H(p) \Rightarrow V(p+1) = H(p+1)$$

STEG 3 Enligt steg 1 gäller påståendet för $n = 1$. Då gäller det enligt steg 2 även för $n = 1 + 1 = 2$. Men då gäller det även för $n = 2 + 1 = 3$ o.s.v. Via matematisk induktion har vi alltså att påståendet gäller för alla $n \in \mathbf{Z}^+$, v.s.v.