Tentamen
TNA001 – Matematisk grundkurs

Datum:	2012-01-12
Tid:	08.00 – 13.00
Kurskod:	TNA001
Provkod:	TEN1
Institution:	ITN
Examinator:	Sixten Nilsson
Hjälpmedel:	Inga, förutom skriv- och ritmateriel

Bedömningsgrunder och beskrivning av vad som menas med en fullständig lösning

Uppgifterna på denna tentamen bedöms genom att varje uppgift poängsätts med 0 - 6 poäng. Om inte annat framgår av texten, skall **fullständig lösning** lämnas. Med detta menas att följande moment skall i *lämplig omfattning* ingå i lösningen:

1. Lösningen skall ha förklarande text med förklaringar på vad som görs och varför det får göras. En hänvisning till teorin kan här vara lämpligt. Även en figur kan vara ett bra stöd i detta arbete.
2. Lösningen skall ha en struktur som är lätt att följa.
3. Lösningen skall innehålla en kalkyldel där det går att följa hur resultaten har uppkommit.
4. Lösningen skall ha ett tydligt angivet svar/resultat som är kopplat till den fråga som är ställd.
5. Svaret/resultatet skall där så är lämpligt utvärderas, dvs. prövningar skall genomföras som säkrar resultatet

Poängsättningen vid rättningen tar hänsyn till hur väl samtliga delar ovan är genomförda.

Betyg

Betyg	Poäng på tentamen (inklusive bonuspoäng)
5	≥ 36 , varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
4	28 – 35, varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
3	20 – 27, varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
U	0 – 19

Lösningsskisser kommer att finnas på kurshemsidan http://webstaff.itn.liu.se/~sixni/TNA001.htm i samband med tentamenstidens slut.

1. a) Vilka reella tal x uppfyller villkoret

$$\frac{x+1}{2} \geq \frac{1}{x}?$$

b) Bestäm alla lösningar till ekvationen

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

2. I en ON-bas har en linje ekvationen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

a) Bestäm skärningspunkten mellan den givna linjen och planet med ekvationen $x - 2y + 3z = -6$.

b) Låt punkten $P = (1, -2{,}2)$. Bestäm koordinaterna för den punkt som är P:s ortogonala projektion på den givna linjen.

c) Beräkna avståndet mellan den givna linjen och punkten $P = (1, -2{,}2)$.

3. a) Beskriv vad som menas med en aritmetisk respektive geometrisk summa.
b) Beräkna, uttryckt i n, summan av de n första udda positiva heltalen, d.v.s. beräkna summan

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1), k = 1{,}2{,}3, \ldots, n.$$

c) Beräkna, och förenkla så långt som möjligt, summan

$$\sum_{k=1}^{159} \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^k,$$

där i är den imaginära enheten.

4. a) Skriv på formen $re^{iv}, v \in \mathbb{R}$, det komplexa talet

$$2 - \frac{2}{1-i}.$$

b) Bestäm absolutbeloppet av

$$\left(2 - \frac{2}{1-i}\right)^{12}.$$

c) Markera i ett komplext talplan alla komplexa tal z som uppfyller villkoret $|z - 3i| = |z - 2|$.

5. Bestäm alla reella lösningar till ekvationen
a)

$$e^{3x} - 4e^{2x} - 3e^x + 18 = 0.$$

b)

$$|e^x - 1| = 1 - e^{x-1}$$

6. Funktionen $\arcsin(x)$ är som bekant definierad för $-1 \leq x \leq 1$. Låt nu $f(x) = \arcsin(x^2 - x - 1)$.
a) Bestäm f:s definitionsmängd, D_f.
b) Bestäm alla lösningar till ekvationen $f(x) = \arccos(x-3) - \frac{\pi}{2}$. (Ledning: Undersök först definitionsmängden till $\arccos(x-3)$.)

7. Funktionerna **sinus hyperbolicus** och **cosinus hyperbolicus** definieras som

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ respektive } \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Har någon av dessa funktioner invers på hela sitt definitionsområde? Bestäm i så fall denna/dessa inverser.