Tentamen
TNA001 – Matematisk grundkurs

Datum:	2010-01-14
Tid:	08.00 – 13.00
Kurskod:	TNA001
Provkod:	TEN1
Institution:	ITN
Examinator:	Sixten Nilsson
Hjälpmedel:	Inga, förutom skriv- och ritmateriel

Bedömningsgrunder och beskrivning av vad som menas med en fullständig lösning

Uppgifterna på denna tentamen bedöms genom att varje uppgift poängsätts med 0 - 6 poäng. Om inte annat framgår av texten, skall **fullständig lösning** lämnas. Med detta menas att följande moment skall i *lämplig omfattning* ingå i lösningen:

1. Lösningen skall ha förklarande text med förklaringar på vad som görs och varför det får göras. En hänvisning till teorin kan här vara lämpligt. Även en figur kan vara ett bra stöd i detta arbete.
2. Lösningen skall ha en struktur som är lätt att följa.
3. Lösningen skall innehålla en kalkyldel där det går att följa hur resultaten har uppkommit.
4. Lösningen skall ha ett tydligt angivet svar/resultat som är kopplat till den fråga som är ställd.
5. Svaret/resultatet skall där så är lämpligt utvärderas, dvs. prövningar skall genomföras som säkrar resultatet

Poängsättningen vid rättningen tar hänsyn till hur väl samtliga delar ovan är genomförda.

Betyg

Betyg	Poäng på tentamen (inklusive bonuspoäng)
5	≥ 36 , varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
4	28 – 35, varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
3	20 – 27, varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
U	0 – 19

Lösningsskisser kommer att finnas på kurshemsidan http://webstaff.itn.liu.se/~sixni/TNA001.htm i samband med tentamenstidens slut.

1. a) Sambanden $\cos(v+\pi) = -\cos v$ och $\sin(v+\pi) = -\sin v$ gäller som bekant för alla reella tal v.

   Illustrera de båda sambanden i en figur för $0 < v < \frac{\pi}{2}$. Kommentera figuren på något lämpligt sätt.

   b) Visa med hjälp av additionssatsen för cosinus att $\cos 2v = \cos^2 v - \sin^2 v$.

   c) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen $\cos(2x+\pi) = \sin(x+\pi)$.

2. a) Lös ekvationen $|x+3| - 3x = |x-1|$.

   b) För vilka reella tal x gäller det att $\dfrac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x-3} \leq 0$.

3. I en ON-bas har en linje och ett plan ekvationerna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$, respektive $x + y + z = 5$.

   a) Bestäm linjens skärningspunkt med planet.

   b) Bestäm ekvationen för den linje, $L_{proj.}$, som är den givna linjens ortogonala projektion i det givna planet.

4. a) Visa att de komplexa tal $z = x + iy$, som är lösningar till ekvationen $z\bar{z} - iz + i\bar{z} = 0$, ligger på en cirkel i det komplexa talplanet och att cirkeln har medelpunkt i $(0,-1)$ och radie 1.

   b) Bestäm alla punkter som ligger på cirkeln och har x-koordinaten $\frac{1}{2}$.

   c) Bestäm skärningspunkterna mellan cirkeln och linjen $y = x - 1$.

   Anm: Du få göra uppgift b) och c) även om du inte klarat a)-uppgiften, d.v.s. du får utgå från den i a) beskrivna cirkelns geometri.

5. Låt $f(x) = \ln(x^2) + \ln(x-4) + \ln\frac{1}{x}$.

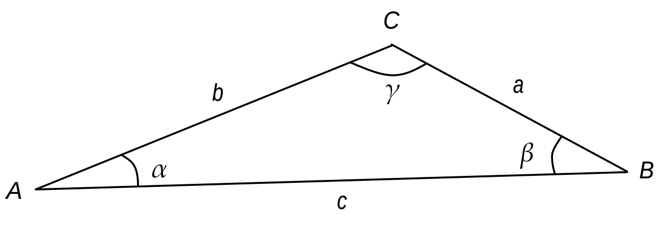
   a) Bestäm först definitionsmängden till f och sedan, om möjligt, inversen till f.

   b) Lös ekvationen $f(x) = 0$.

6. Låt sidorna i triangeln ABC ha längderna a, b och c, samt vinklarna α, β och γ (se figur). Låt vidare $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$. Uttryck $\overrightarrow{CB}$ med hjälp av vektorerna **u** och **v**, och visa med hjälp av skalärprodukt att

   $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$ (cosinussatsen).

   Ledning: För en vektor **w** gäller det att $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{w}|^2$.



7. Låt $s_n = \sum_{k=1}^{n} e^{ik\frac{\pi}{2}}$.

   a) För vilka värden på n är $s_n = 0$?

   b) Vilka andra komplexa tal kan s_n anta, och för vilka värden på n antar s_n dessa tal?