

TNA001- Matematisk grundkurs - Tentamen 2009-01-15
Lösningsskiss

1. a) Eftersom planet är vinkelrätt mot den givna linjen kan vi välja linjens riktningsvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ som planets normalvektor. Detta ger oss planets ekvation: $3(x-1) - (y-2) + 2(z+3) = 0 \Leftrightarrow 3x - y + 2z = -5$.
Svar: Π_1 har ekvationen $3x - y + 2z = -5$

- b) Origo tillhör inte planet ty $(0,0,0)$ satisfierar inte Π_1 's ekvation. Däremot gör t.ex. $\left(0,0,-\frac{5}{2}\right)$ det.
Svar: T.ex. punkten $\left(0,0,-\frac{5}{2}\right)$.

2. a) Eftersom $|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{om } x \geq 4 \\ 4-x & \text{om } x \leq 4 \end{cases}$ får vi två olika fall, som sammanställs i följande tabell:

$I_1: x \leq 4$	$I_2: x \geq 4$
$4 - x - 3x - 8 = 0 \Leftrightarrow -4x = -4 \Leftrightarrow x = -1 \in I_1$, så $x = -1$ är en lösning.	$x - 4 - 3x - 8 = 0 \Leftrightarrow -2x = 12 \Leftrightarrow x = -6 \notin I_2$, så ekvationen saknar lösning i detta intervall.

Kontroll:

$x = -1$ insatt i ekvationen ger oss $VL = |-1-4| - 3 \cdot (-1) - 8 = 5 + 3 - 8 = 0 = HL$, d.v.s. $x = -1$ är en lösning.
 $x = -6$ insatt i ekvationen ger oss $VL = |-6-4| - 3 \cdot (-6) - 8 = 10 + 18 - 8 = 20 \neq 0 = HL$, d.v.s. $x = -6$ är inte en lösning.

Svar: $x = -1$

- b) Eftersom $|3-x| = \begin{cases} 3-x & \text{om } x \leq 3 \\ x-3 & \text{om } x \geq 3 \end{cases}$ och $|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{om } x \geq 1 \\ 1-x & \text{om } x \leq 1 \end{cases}$ får vi tre fall:

$I_1: x \leq 1$	$I_2: 1 \leq x \leq 3$	$I_3: x \geq 3$
$3 - (3-x) > 1 - x \Leftrightarrow 2x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$, d.v.s. olikheten har lösningsmängden $L_1 = \left] \frac{1}{2}, 1 \right]$ i I_1	$3 - (3-x) > x - 1 \Leftrightarrow 0 > -1$, vilket är uppfyllt för alla x i I_2 så olikheten är uppfyllt för alla $x \in L_2 = I_2 = [1, 3]$ lösning i detta intervall.	$3 - (x-3) > x - 1 \Leftrightarrow 6 - x > x - 1 \Leftrightarrow 7 > 2x \Leftrightarrow x < \frac{7}{2}$ d.v.s. olikheten har lösningsmängden $L_3 = \left[3, \frac{7}{2} \right[$ i I_3

Ovanstående visar att olikheten är uppfyllt för alla $x \in L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \left] \frac{1}{2}, \frac{7}{2} \right[$.

Svar: $x \in \left] \frac{1}{2}, \frac{7}{2} \right[$

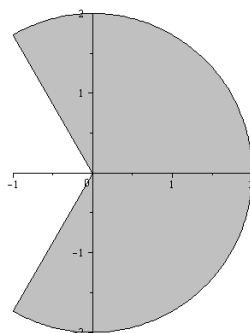
3. a) Med $w = -1 - i\sqrt{3}$ $|w| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$. Argumentet för w finner vi t.ex. via en figur (rita denna!) och får $\arg w = -\frac{2\pi}{3}$ (eller vilken som helst av $-\frac{2\pi}{3} + n2\pi, n \in \mathbf{Z}$).

Svar: $|w| = 2, \arg w = -\frac{2\pi}{3} \quad z = 5e^{i\frac{2\pi}{3}}$

b) $(zw)^8 = \left(5e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot 2e^{-i\frac{2\pi}{3}} \right)^8 = (10e^0)^8 = 10^8$

Svar: $(zw)^8 = 10^8$

- c) Låt $u = x + iy \Rightarrow |u| = 2 \Leftrightarrow |x + iy| = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$, d.v.s. villkoret $|u| \leq 2$ ger oss alla komplexa tal som ligger innanför och på randen till en cirkel med medelpunkt i origo och radien 2. Det andra villkoret, $-\frac{2\pi}{3} \leq \arg u \leq \frac{2\pi}{3}$, innebär att vi har alla komplexa tal u som ligger mellan strålarna $-\frac{2\pi}{3}$ och $\frac{2\pi}{3}$. Båda villkoren är alltså uppfyllda för komplexa tal som ligger inom och på randen till cirkelsektorn i figuren nedan.



4. a) Alla termer i ekvationen $\ln(3-x) = \ln(x-1) + \ln x + \ln 2$ är *samtidigt* definierade om och endast om de tre olikheterna $3-x > 0, x-1 > 0$ och $x > 0$ är uppfyllda. Detta gäller för $1 < x < 3$ (Illustrera på en talaxel!) För dessa x har vi

$$\ln(3-x) = \ln(x-1) + \ln x + \ln 2 \Leftrightarrow \ln(3-x) = \ln(2x(x-1)) \Leftrightarrow \ln(3-x) = \ln(2x^2 - 2x) \Leftrightarrow$$

$$\text{/ty } \ln \text{ är en strängt växande funktion/ } 3-x = 2x^2 - 2x \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

(Observera att andragradekvationens andra rot $x = -1$ inte ligger i intervallet $1 < x < 3$)

Svar: $x = \frac{3}{2}$

- b) Olikheten $\ln(x^2 - 9) \geq \ln(3-x) + \ln 2$ är uppfylld omm följande tre villkor är uppfyllda samtidigt

1. $x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) > 0 \Leftrightarrow x \in L_1 =]-\infty, -3[\cup]3, \infty[$

2. $3-x > 0 \Leftrightarrow x \in L_2 =]-\infty, 3[$

3. $\ln(x^2 - 9) \geq \ln(3-x) + \ln 2 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 9) \geq \ln(6-2x) \Leftrightarrow$ /ty \ln är en strängt växande funktion/

$$x^2 - 9 \geq 6 - 2x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+5) \geq 0 \Leftrightarrow$$
 / Gör ett teckenstudium/

$$x \in L_3 =]-\infty, -5] \cup [3, \infty[$$

Den givna olikheten är alltså uppfylld om $x \in L_1 \cap L_2 \cap L_3 =$ /Illustrera på en talaxel/ $=]-\infty, -5]$.

Svar: $x \in]-\infty, -5]$

5. a) Vi har att $f(x) = \frac{1-2x}{3}$, $x \in [-1,5]$ är strängt avtagande (ty grafen till f är en rät linje med riktningskoefficient $-\frac{2}{3} < 0$). Vi har då $V_f = [f(5), f(-1)] = [-3,1]$.

För att finna inversen löser vi ut x ur

$$y = \frac{1-2x}{3}, x \in [-1,5] \Leftrightarrow 2x = 1-3y, x \in [-1,5] \Leftrightarrow x = \frac{1-3y}{2}, x \in [-1,5], y \in [-3,1]$$

Alltså har f invers med $f^{-1}(x) = \frac{1-3x}{2}$, $D_{f^{-1}} = V_f = [-3,1]$ $x \in [-1,5]$.

Svar: f har invers f^{-1} med $f^{-1}(x) = \frac{1-3x}{2}$, $D_{f^{-1}} = V_f = [-3,1]$

b) För $g(x) = 2 + \ln(2x-1)$ gäller det att $2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$, d.v.s. $D_g = \left] \frac{1}{2}, \infty \right[$. För att finna en

eventuell invers löser vi för $x > \frac{1}{2}$ ut x ur sambandet

$$y = 2 + \ln(2x-1) \Leftrightarrow \ln(2x-1) = y-2 \Leftrightarrow 2x-1 = e^{y-2} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{e^{y-2} + 1}{2}, \text{ där } y \in \mathbf{R}.$$

Svar: $g^{-1}(x) = \frac{e^{x-2} + 1}{2}$, $x \in \mathbf{R}$

6. a) Vi bestämmer den riktning $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ som är ortogonal mot båda linjernas riktningsvektorer $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

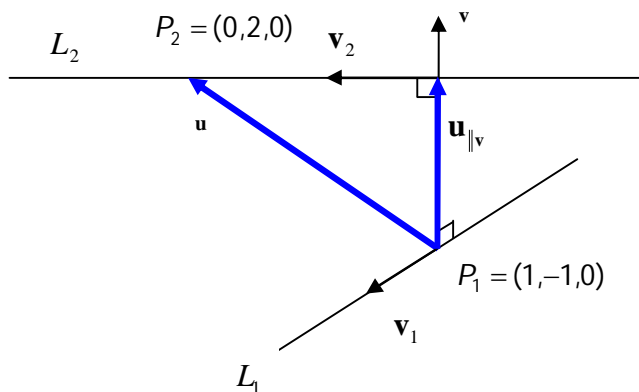
och $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Det betyder att

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A - B + C = 0 \\ A + 3B + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{t}{7} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Svar: Vektorn $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ är vinkelrät mot båda linjerna.

b) Först en figur där \mathbf{v}_1 och \mathbf{v}_2 motsvarar respektive linjes riktningvektor och beteckningarna i övrigt framgår nedan.



Vi har från a)-uppgiften att $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ är vinkelrät mot båda linjerna. Vi bildar vektorn \mathbf{u} som går från

L_1 till L_2 :

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Avståndet från L_1 till L_2 ges därför av $|\mathbf{u}_{\parallel \mathbf{v}}|$. Det följer att

$$\mathbf{u}_{\parallel \mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \cdot \mathbf{v} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}}{66} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} = \frac{-1}{66} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Avståndet från L_1 till L_2 är alltså $|\mathbf{u}_{\parallel \mathbf{v}}| = \frac{\sqrt{66}}{66} = \frac{1}{\sqrt{66}}$ i.e.

Svar: $\frac{1}{\sqrt{66}}$ i.e.

7.

Sambandet kan skrivas $x^n - 1 = (x-1) \sum_{k=1}^n x^{n-k}$, $n \in \mathbf{Z}^+$. Vi bevisar påståendet med hjälp av ett induktionsbevis.

STEG 1: $P(1)$: $V(1) = x^1 - 1 = x - 1$, $H(1) = (x-1) \cdot \sum_{k=1}^1 x^{1-k} = (x-1) \cdot x^{1-1} = x - 1$
Alltså $V(1) = H(1)$ d. v. s. $P(1)$ gäller.

STEG 2: Vi antar att $P(p)$ gäller för godtyckligt fixt tal $p \in \mathbf{Z}^+$, d.v.s. vi antar att

$$H(p) = (x-1) \sum_{k=1}^p x^{p-k} = x^p - 1 = V(p)$$

Detta medför att

$$\begin{aligned}
H(p+1) &= (x-1) \sum_{k=1}^{p+1} x^{p+1-k} = (x-1) \cdot \left(\left(\sum_{k=1}^p x^{p+1-k} \right) + x^{p+1-(p+1)} \right) = (x-1) \left(x \sum_{k=1}^p x^{p-k} + x^0 \right) = \\
&= x(x-1) \sum_{k=1}^p x^{p-k} + (x-1) = \text{/enligt antagandet/} = x(x^p - 1) + (x-1) = x^{p+1} - x + x - 1 = \\
&= x^{p+1} - 1 = V(p+1) \\
\text{d.v.s. } H(p) = V(p) &\Rightarrow H(p+1) = V(p+1)
\end{aligned}$$

STEG 3 Enligt steg 1 gäller påståendet för $n = 1$. Då gäller det enligt steg 2 även för $n = 1 + 1 = 2$. Men då gäller det även för $n = 2 + 1 = 3$ o.s.v. Via matematisk induktion har vi alltså att påståendet gäller för alla $n \in \mathbf{Z}^+$, v.s.v.