

Tentamen

TNA001 – Matematisk grundkurs

Datum: 2011-08-22
Tid: 08.00 – 13.00
Kurskod: TNA001
Provkod: TEN1
Institution: ITN
Examinator: Sixten Nilsson
Hjälpmedel: Inga, förutom skriv- och ritmateriel

Bedömningsgrunder och beskrivning av vad som menas med en fullständig lösning

Uppgifterna på denna tentamen bedöms genom att varje uppgift poängsätts med 0 - 6 poäng. Om inte annat framgår av texten, skall **fullständig lösning** lämnas. Med detta menas att följande moment skall i *lämplig omfattning* ingå i lösningen:

1. Lösningen skall ha förklarande text med förklaringar på vad som görs och varför det får göras. En hänvisning till teorin kan här vara lämpligt. Även en figur kan vara ett bra stöd i detta arbete.
2. Lösningen skall ha en struktur som är lätt att följa.
3. Lösningen skall innehålla en kalkyldel där det går att följa hur resultaten har uppkommit.
4. Lösningen skall ha ett tydligt angivet svar/resultat som är kopplat till den fråga som är ställd.
5. Svaret/resultatet skall där så är lämpligt utvärderas, dvs. prövningar skall genomföras som säkrar resultatet

Poängsättningen vid rättningen tar hänsyn till hur väl samtliga delar ovan är genomförda.

Betyg

Betyg	Poäng på tentamen (inklusive bonuspoäng)
5	≥ 36 , varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
4	28 – 35, varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
3	20 – 27, varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
U	0 – 19

Lösningsskisser kommer att finnas på kurshemsidan <http://webstaff.itn.liu.se/~sixni/TNA001.htm> i samband med tentamenstidens slut.

1. a) Lös ekvationen

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, x \in [0, \pi].$$

b) Vilka reella tal x uppfyller villkoret

$$\frac{2(x^2 - x - 1)}{x - 1} \geq x?$$

2. I en ON-bas har planet Π ekvationen

$$x - 2y + z = 0$$

och linjen L_1 ekvationen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

a) Ange en ekvation för ett plan (valfritt) som är ortogonalt mot linjen L_1 .

b) Bestäm skärningspunkten mellan planet Π och linjen L_1 .

c) Bestäm en ekvation för linjen L_1 :s ortogonala projektion på planet Π .

3. a) Bestäm definitionsmängden till funktionen $f(x) = \ln(2x + 1) + \ln(x)$ och bestäm sedan alla reella lösningar till ekvationen $f(x) = 0$.

b) För vilka reella x gäller det att $2e^{3x} - e^{2x} = 2e^x$.

4. a) Beräkna $(2\sqrt{3} - 2i)^{18}$. Ange svaret på formen $x + iy$ där $x \in \mathbb{R}$ och $y \in \mathbb{R}$.

b) Markera i ett komplext talplan alla komplexa tal z som uppfyller villkoret $|z - 2i| = \sqrt{3}$. Analytisk lösning krävs för full poäng, d.v.s. enbart figur räcker inte.

5. a) Använd definitionen av den komplexa exponentialfunktionen, e^{ix} , och dess konjugat, e^{-ix} , för att visa att

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

b) Utnyttja formeln i a)-uppgiften och visa att

$$4 \cos^3 x = 3 \cos x + \cos 3x.$$

6. Visa att

$$\sum_{k=1}^n (7 - 2k) = 6n - n^2$$

för alla $n \in \mathbb{Z}^+$

7. Undersök om funktionen $f(x) = \cos(e^{-x^2})$, $x \geq 0$, har invers. Bestäm den i så fall (inklusive dess definitionsmängd).