Tentamen
TNA001 – Matematisk grundkurs

Datum:	2010-08-27
Tid:	08.00 – 13.00
Kurskod:	TNA001
Provkod:	TEN1
Institution:	ITN
Examinator:	Sixten Nilsson
Hjälpmedel:	Inga, förutom skriv- och ritmateriel

Bedömningsgrunder och beskrivning av vad som menas med en fullständig lösning

Uppgifterna på denna tentamen bedöms genom att varje uppgift poängsätts med 0 - 6 poäng. Om inte annat framgår av texten, skall **fullständig lösning** lämnas. Med detta menas att följande moment skall i *lämplig omfattning* ingå i lösningen:

1. Lösningen skall ha förklarande text med förklaringar på vad som görs och varför det får göras. En hänvisning till teorin kan här vara lämpligt. Även en figur kan vara ett bra stöd i detta arbete.
2. Lösningen skall ha en struktur som är lätt att följa.
3. Lösningen skall innehålla en kalkyldel där det går att följa hur resultaten har uppkommit.
4. Lösningen skall ha ett tydligt angivet svar/resultat som är kopplat till den fråga som är ställd.
5. Svaret/resultatet skall där så är lämpligt utvärderas, dvs. prövningar skall genomföras som säkrar resultatet

Poängsättningen vid rättningen tar hänsyn till hur väl samtliga delar ovan är genomförda.

Betyg

Betyg	Poäng på tentamen (inklusive bonuspoäng)
5	≥ 36 , varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
4	28 – 35, varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
3	20 – 27, varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
U	0 – 19

Lösningsskisser kommer att finnas på kurshemsidan http://webstaff.itn.liu.se/~sixni/TNA001.htm i samband med tentamenstidens slut.

1. Låt $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vara två vektorer i en ON-bas i rummet.

a) Är $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ortogonala? Om inte, bestäm den ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$, d.v.s. bestäm vektorn $\mathbf{u}_{\|\mathbf{v}}$.

b) Bestäm en normalvektor för det plan som $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ spänner upp.

2. Bestäm alla reella lösningar till ekvationerna

a) $|x+2|-|x| = 1$ b) $x^3 - 3x + 2 = 0$

3. **Anm:** Då du löser deluppgifter till denna uppgift får du använda samband som skall visas i en "tidigare" deluppgift för att lösa en senare, även om du inte lyckats visa sambandet.

a) Använd egenskaper hos sinus- och cosinusfunktionerna för att visa additionsformeln för tangens, d.v.s. att $\tan(u+v) = \dfrac{\tan(u)+\tan(v)}{1-\tan(u)\cdot\tan(v)}$.

b) Använd sambandet i a) för att visa att $\tan 2v = \dfrac{2\tan v}{1-\tan^2 v}$.

c) Bestäm alla reella tal x för vilka det gäller att $\tan x + \tan(x+\pi/3) = 0$.

4. a) Beräkna $\left(\sqrt{3}+i\right)^{12}$.

b) Låt $z = x+iy,\ x, y \in \mathbf{R}$. Markera i det komplexa talplanet alla komplexa tal z som uppfyller villkoret $\left|z+iz\right| = \sqrt{2}$.

5. a) För vilka reella x är $f(x) = \sqrt{2-\ln(2x-1)}$ definierad?

b) Bestäm alla reella x som uppfyller villkoret $\sqrt{2-\ln(2x-1)} = \ln(2x-1)$.

6. Bestäm på formen $Ax+By+Cz = D$ ekvationen för det plan som innehåller punkterna $P_1 = (2,-3,0)$ och $P_2 = (2,-2,2)$ och är parallellt med linjen $L: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$.

(ON-bas förutsätts)

7. Antag att $D^{(n)}$ avbildar den reella funktionen $f(x) = Cx^k$ på en reell funktion så att

(*i*) $D^{(1)}(C) = 0$

(*ii*) $D^{(1)}(Cx^k) = Ckx^{k-1}$, $D^{(2)}(Cx^k) = Ck(k-1)x^{k-2}$, $D^{(3)}(Cx^k) = Ck(k-1)(k-2)x^{k-3}$, etc.

där $n \in \mathbf{Z}^+$ och C och k är godtyckliga reella konstanter.

Observera att det av (*i*) och (*ii*) t.ex. följer att $D^{(n+1)}\left(Cx^k\right) = D^{(1)}\left(D^{(n)}(Cx^k)\right)$.

Visa att då gäller det att $D^{(n)}\left(x^{-1}\right) = (-1)^n n!\,x^{-(n+1)}$ för alla $n \in \mathbf{Z}^+$.