

# TNA001

## Förslag till övningsuppgifter

**FN = Forsling/Neymark, K = Kompendiet – Vektorer, linjer och plan,**

**Ö = Övningstentamen**

### 1. Vektorer, linjer och plan

**Ö:4, 6, K3.2, K3.3 och Uppgifterna 1 och 2 nedan**

#### Uppgift 1.

Linjen  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , och punkten  $P = (2, -1, 1)$  är givna i en ON-bas.

- Beräkna avståndet mellan linjen och punkten.
- Bestäm koordinaterna för  $P$ 's spegling,  $S$ , i linjen.

#### Uppgift 2.

- Beräkna avståndet mellan punkten  $P = (3, 0, -1)$  och skärningslinjen mellan planen  $x + y - z = 1$  och  $x + 2y = 1$ .
- Bestäm koordinaterna för  $P$ 's ortogonala projektion,  $Q$ , på skärningslinjen (från a)-uppgiften).
- Bestäm koordinaterna för  $P$ 's spegling,  $S$ , i skärningslinjen (från a)-uppgiften).

### 2. Inverser

**FN: 2.67, 2.68 och Uppgifterna 3 och 4 nedan**

#### Uppgift 3.

- En funktion som är omvändbar har som bekant invers. Förklara vad som menas med att en funktion är omvändbar. Rita gärna kompletterande figur/figurer.
- Visa att funktionen  $g(x) = x^2 - 2x - 3$ ,  $1 \leq x \leq 4$  har en invers  $g^{-1}$ . Bestäm även inversen och dess definitionsmängd  $D_{g^{-1}}$ .

#### Uppgift 4.

Betrakta funktionen  $f(x) = \sqrt{1 - \ln(2x - 1)}$ .

- För vilka  $x \in \mathbb{R}$  är  $f(x)$  definierad?
- Bestäm, om möjligt, inversen till  $f$ .

### 3. Olikheter

**FN: 1.105abc**

### 4. Absolutbelopp

**Ö:1**

### 5. In och exp

**Ö:5 och FN: 2.70**

## 6. Trigonometri (inklusive arcusfunktionerna)

Ö:1c, Ö:3, Ö7 (svår) och Uppgifterna 5 och 6 nedan

### Uppgift 5.

a) Visa att  $\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$

b) Bestäm det exakta värdet av  $\sin(u+v)$  om  $\sin u = \frac{1}{3}$ ,  $\frac{\pi}{2} < u < \pi$  och

$$\sin v = -\frac{2}{3}, \frac{3\pi}{2} < v < 2\pi.$$

### Uppgift 6.

Lös ekvationerna

a)  $2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1, x \in [0, 2\pi]$ .

b)  $\cos x - 4 \sin(2x) \cdot \sin x + 2 \cos(2x) \cdot \cos x = 0, x \in ]-\pi, \pi]$

c)  $\arcsin x = \arccos(3x)$

## 7. Komplexa tal

Ö:2 och FN: 2.63a, 2.64, 2.81a och Uppgift 7 nedan

### Uppgift 7

a) Åskådliggör i det komplexa talplanet de punkter för vilka det gäller att  $\operatorname{Re} z \geq 0$  och  $|z| \leq 2$ .

b) Visa att  $\operatorname{Re} z = 0$  om  $z = \frac{a+bi}{a-bi} - \frac{a-bi}{a+bi}$ ,  $a, b \in \mathbf{R}$ .

## 8. Geometrisk, aritmetisk summa, binomialsatsen

FN: 1.116a och Uppgift 8 nedan

### Uppgift 8

Ange, med motivering, för vart och ett av följande tre påståenden (A, B och C) om det är sant eller falskt.

A. Koefficienten för  $x^5$  är  $-7$  i utvecklingen av  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^8$ .

B. I den aritmetiska talföljd, som börjar enligt  $-5, 3, 11, 19, \dots$ , är det 215:e elementet lika med 1707.

C. Det gäller att  $\sum_{k=1}^{15} (3 \cdot 2^{k-1}) = 2^{15} - 1$

## 9. Induktionsbevis

Uppgift 9 nedan

### Uppgift 9

Visa att formeln  $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$  gäller för alla  $n \in \mathbf{Z}^+$ .

## Facit

1. a)  $\frac{1}{6}\sqrt{210}$     b)  $S = \left(-\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$
2. a)  $\frac{1}{2}\sqrt{14}$     b)  $Q = \left(2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$     c)
3. a)    b)  $g^{-1}(y) = 1 + \sqrt{y+4}$ ,  $D_{g^{-1}} = [-4, 5]$
4. a)  $D_f = \left[\frac{1}{2}, \frac{e+1}{2}\right]$
- b)  $f^{-1}(y) = \frac{e^{1-y^2} + 1}{2}$  (eller  $f^{-1}(x) = \frac{e^{1-x^2} + 1}{2}$ ) med  $D_{f^{-1}} = [0, \infty[$ .

5. b)  $\frac{\sqrt{5} + 4\sqrt{2}}{9}$

6. a)  $x_1 = \frac{\pi}{4}$ ,  $x_2 = \frac{5\pi}{4}$ ,  $x_3 = \frac{7\pi}{12}$  och  $x_4 = \frac{19\pi}{12}$

### b) Lösning

$$\cos x - 4 \sin(2x) \sin x + 2 \cos(2x) \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\cos x - 8 \sin^2 x \cos x + 2(1 - 2 \sin^2 x) \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\cos x(-12 \sin^2 x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \text{eller} \\ \sin^2 x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

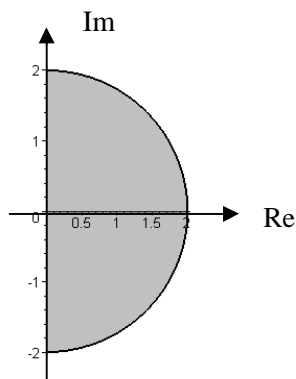
$$\cos x = 0 \text{ ger oss } x = \pm \frac{\pi}{2} \text{ och}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2}, \text{ vilket ger lösningarna } x = \pm \frac{\pi}{6}, x = \pm \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{Svar: } x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{\pi}{6}, \pm \frac{5\pi}{6}$$

c)  $x = \frac{1}{\sqrt{10}}$

7. a)



### 7b) Lösning

$$z = \frac{a+bi}{a-bi} - \frac{a-bi}{a+bi} = \frac{(a+bi)^2 - (a-bi)^2}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a^2 + 2abi + (bi)^2 - a^2 + 2abi - (bi)^2}{a^2 - (bi)^2} =$$
$$= \frac{4abi}{a^2 + b^2} = \underbrace{0}_{\text{Re } z} + \underbrace{\frac{4ab}{a^2 + b^2}}_{\text{Im } z} i$$

d.v.s.  $\text{Re } z = 0$ , v.s.v.

### 8. Lösning:

**A: SANT** ty  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^8 = \sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} x^{8-k} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$ , d.v.s.  $x^5$ -termen erhålls för  $k = 3$ ,

vilket innebär att koefficienten för  $x^5$  blir  $\binom{8}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \dots = \dots = -7$ .

**B: SANT** ty för en aritmetisk talföljd gäller att  $n$ :te elementet  $a_n = a_1 + (n-1)d$ , där  $a_1$  är det första elementet och  $d$  är differensen, vilket innebär att i vår talföljd har vi  $a_{215} = -5 + (215-1) \cdot 8 = 1707$ .

**C: FALSKT** ty  $\sum_{k=1}^{15} (3 \cdot 2^{k-1}) = \frac{3(2^{15}-1)}{2-1} = 3(2^{15}-1) \neq 2^{15}-1$

**Svar: A och B är sanna, C är falskt.**

### 9. Lösning

Vi skall visa att påståendet  $P(n): \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$  gäller för alla  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

#### Bevismetod: Induktion

##### Steg I

$$V(1) = \sum_{k=1}^1 \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} \qquad H(1) = 2 - \frac{1+2}{2^1} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Alltså har vi  $V(1) = H(1)$ , d.v.s.  $P(1)$  gäller.

##### Steg II

Antag att  $P(p)$  gäller för ett godtyckligt  $p \in \mathbb{Z}^+$ , d.v.s. antag att  $\sum_{k=1}^p \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{p+2}{2^p}$

Vi får

$$V(p+1) = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^p \frac{k}{2^k} + \frac{p+1}{2^{p+1}} \stackrel{\text{Enligt antagandet}}{=} 2 - \frac{p+2}{2^p} + \frac{p+1}{2^{p+1}} = 2 - \frac{2(p+2)}{2^{p+1}} + \frac{p+1}{2^{p+1}} =$$
$$= 2 - \frac{2p+4-p-1}{2^{p+1}} = 2 - \frac{p+3}{2^{p+1}} = 2 - \frac{(p+1)+2}{2^{p+1}} = H(p+1)$$

Alltså:  $V(p) = H(p) \Rightarrow V(p+1) = H(p+1)$  d.v.s. om  $P(p)$  gäller så gäller även  $P(p+1)$ .

##### Steg III

Påståendet gäller enligt I för  $n = 1$ . Enligt II gäller det då även för  $n = 1 + 1 = 2$ . Då gäller det även för  $n = 2 + 1 = 3$  o.s.v. Via matematisk induktion gäller påståendet för alla  $n \in \mathbb{Z}^+$ , v.s.v.