



c)  $\frac{1}{3+\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}}$

d)  $\frac{8}{\sqrt{5}+1} - \sqrt{5}$

e)  $\frac{1}{2\sqrt{5}-2} - \frac{1}{8}$

R8. Skriv som en summa. (Försök att göra det direkt med hjälp av de inrutade reglerna nedan)

a)  $(a+b-c)^2$

b)  $(a-b-c)^2$

c)  $\left(x - \frac{y}{2} + \frac{z}{3}\right)^2$

d)  $(1+2x)^3$

e)  $\left(\frac{y}{3} - 1\right)^3$

R9. Undersök om följande uttryck kan delas upp i faktorer. Utför faktoriseringen där så är möjligt

a)  $y^2 - 4x^2$

b)  $x^3 + 2x^2 + x$

c)  $x^4 - 2x^3 + x^2$

d)  $a(x+y) - b(x+y)$

e)  $ac - bc - a + b$

f)  $x(a-b) - y(a+b)$

R10. Förenkla de rationella uttrycken

a)  $\frac{x^2 - 1}{1 + x}$

b)  $\frac{9x^2 + 12xy + 4y^2}{9x^2 - 4y^2}$

c)  $\frac{a^2x^3 - x}{ax^2 - x}$

d)  $\frac{t^3 - t^2}{t - t^2}$

R11. Förenkla

a)  $1 - \frac{a}{a+b}$

b)  $\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2-x}$

c)  $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{x+y}\right)$

d)  $\frac{\frac{x}{y} + 1}{\frac{x}{y} - 1}$

e)  $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}$

f)  $\frac{\frac{p}{3} - 2 + \frac{3}{p}}{1 - \frac{3}{p}}$

g)  $\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

### FN Kap 1.3 (R12 – R14)

R12. Sök ekvationen för den räta linje som går genom de angivna punkterna. Ange ytterligare en punkt som ligger på samma linje.

a) (1,5) och (-3,2)

b) (-4,7) och (2,-3)

c) (-3,18) och (400,18)

d) (-3,43) och (-3,87)

R13. Bestäm skärningspunkten (om det finns någon) med koordinataxlarna för linjerna i R.12.

- R14. Bestäm ekvationen för normalen till linjerna i R.12 som går genom den först angivna punkten i resp. deluppgift.

### FN Kap 1.4 (R15 – R29)

- R15. Kvadratkomplettera polynomen

a) $x^2 + 3x - 1$	b) $x^2 - 9x + 20$
c) $x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{1}{10}$	d) $-x^2 - \frac{x}{2}$
e) $3x^2 - 2x + 1$	f) $-2x^2 + 5x - 2$

- R16. Bestäm eventuella största eller minsta värden för polynomen i uppgift R15 ovan. Ange också för varje polynom det  $x$ -värde för vilket respektive extremvärde antas.

- R17. Lös ekvationerna. (Tänk på att de alla är s.k. nollprodukter.)

a) $(x - 3)(2 - x) = 0$	b) $(2x - 1)(2 + 3x) = 0$
c) $9x(2x + 1) = 0$	d) $(x - 1)\left(2x + \frac{1}{2}\right)(x + 84) = 0$

- R18. Lös ekvationerna.

a) $2x^2 - 6x + 3 = 0$	b) $12x - 9x^2 = 4$
c) $4x(x + 3) = 7$	d) $x + \frac{242}{x} = 33$

- R19. Sök alla reella lösningar till ekvationerna

a) $x^4 - 14x^2 + 45 = 0$	b) $(x^2 - 1)^2 + 2(x^2 - 1) = 8$
c) $x^6 = 9 + 8x^3$	

- R20. Bestäm ekvationen för den cirkel som har medelpunkt i  $M$  och radie  $r$ .

a) $M = (0,0)$ och $r = 1$	b) $M = (0,0)$ och $r = 3$
c) $M = (1,0)$ och $r = 2$	d) $M = (0,-2)$ och $r = 1$
e) $M = (2,3)$ och $r = 3$	f) $M = (-2,-3)$ och $r = \sqrt{2}$

- R21. Följande ekvationer beskriver en kurva i planet. Beskriv denna kurva. (Anm: Även en rät linje är en kurva.)

a) $(x - 4)^2 + y^2 = 4$	b) $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 3$
c) $x^2 + 2x + y^2 + 2y - 2 = 0$	d) $(x - 1)^2 + 4y^2 = x^2 - 2x + 4(y + 1)^2$
e) $(x + 1)^2 - 2(y + 1)^2 = x^2 - 2y^2$	

- R22. Bestäm kvoten och resten vid division av  $p(x)$  med  $q(x)$  om

a) $p(x) = x^2 - 2x + 3$ , $q(x) = x - 1$	b) $p(x) = x^3 + 5x^2 - x + 1$ , $q(x) = x + 3$
c) $p(x) = 9 - x^3 + 2x^2$ , $q(x) = x - 3$	

- R23. Skriv följande rationella uttryck som en summa av ett polynom och ett rationellt uttryck.

a) $\frac{x^2 + x + 1}{x - 2}$	b) $\frac{17x^2 + 5}{x + 3}$
--------------------------------	------------------------------

R24. Visa att polynomet

a)  $f(x) = x^6 + 2x^5 + x^3 + x + 3$  har en faktor  $x + 1$

b)  $g(x) = x^7 - 128$  har en faktor  $x - 2$

c)  $h(x) = x^{47} - 5x^{73} + 4x^{11}$  är delbart med  $x + 1$

R25. Faktorisera i förstagsuttryck polynomet

a)  $p_1(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

b)  $p_2(x) = \frac{x}{8} + \frac{x^2}{4} - x^3$  c)

$p_3(x) = 13x^2 - 44x - x^3 + 32$

R26. Visa att ekvationen  $x^3 + 6x^2 + 3x - 10 = 0$  har lösningen  $x = 1$ . Bestäm därefter ekvationens övriga lösningar.

R27. Lös ekvationerna

a)  $x^3 - 2x + 1 = 0$

b)  $2x^3 - 5x + 3 = 0$

c)  $x^3 - 2x^2 - 6x + 9 = 0$

R28. Polynomet  $f(x) = x^3 - 5x^2 - 8x + 48$  är givet. Ekvationen  $f(x) = 0$  har en dubbelrot  $x = 4$ . Lös ekvationen.

R29. Lös följande ekvationer

a)  $\sqrt{1+4x} = 4x - 1$

b)  $3x + \sqrt{2-x} = 2$

c)  $x + \sqrt{3x+7} = 1$

d)  $\sqrt{x} + \sqrt{2x+2} = 3$

### FN Kap 1.5 (R30 – R34)

R30. Bestäm lösningsmängderna till följande olikheter:

a)  $2(x-1)(x+2) < 0$

b)  $(1-2x)(x+2) > 0$

c)  $\frac{(2x+1)(x-3)}{x+5} \geq 0$

R31. Bestäm lösningsmängderna till olikheterna:

a)  $x^3 - 3x^2 + 2x > 0$

b)  $x^2 + 2x > 18x$

R32. Bestäm lösningsmängderna till följande olikheter:

a)  $\frac{1}{x} < 2x - 1$

b)  $\frac{4x}{x+1} \leq x^2 - 2x$

c)  $\frac{1}{x} < \frac{5-2x}{x+2}$

d)  $x-2 \leq \frac{3}{x} \leq 1$

e)  $-1 < \frac{2x^2}{x-1} \leq 9$

R33. Lös ekvationerna

a)  $|x-3| + x = 5$

b)  $|x-1| + |x-2| = 3$

c)  $|x-5| + |x+5| = 6$

d)  $|x^2 + 2x - 1| = 2$

R34. Lös olikheterna

a)  $|x - 3| + x \leq 5$

b)  $|x - 1| + |x - 2| < 3$

c)  $|x - 5| + |x + 5| > 6$

d)  $|x^2 + 2x - 1| \geq 2$

### FN Kap 1.6 (R35 – R46)

R35. Den aritmetiska talföljden 5, 8, 11, 14, ... är given.

a) Hur många av termerna är mindre än 1000?

b) Beräkna summan av de 20 första termerna.

R36. Vid ett frimärksjubileum diskuterade man att ge ut en frimärksserie med 25 frimärken i valörerna 0.50 kr, 0.90 kr, 1.30 kr, 1.70 kr o. s. v. Vad skulle en sådan utgivning kosta en samlare, som brukar köpa 10 kompletta serier?

R37. Bestäm summan av alla heltal från och med 9 till och med 999 som slutar på 9.

R38. Summan av de  $n$  första termerna i den aritmetiska serien 24, 20, 16, 12, ... är lika med 80. Bestäm  $n$ .

R39. En geometrisk talföljd börjar med 54. Skriv de första fyra termerna i talföljden om kvoten är:

a) 2

b)  $2/3$

c) -2

d)  $-1/3$

R40. a) Talen  $x$ , 2, 4,  $y$  inleder en geometrisk talföljd. Bestäm  $x$  och  $y$ .

b) Talen  $x$ , 2, 3,  $y$  inleder en geometrisk talföljd. Bestäm  $x$  och  $y$ .

R41. I en geometrisk talföljd är  $a_4 = 6$  och  $a_7 = 750$ . Bestäm talföljden och summan av de sju första termerna.

R42. År 1990 var världskonsumtionen av mineralolja 3 Gt. Den totala råoljereserven på jorden uppskattades då till 1 Tt. När tar råoljan slut om den

a) ökar med 4 % årligen

b) minskar med 4 % årligen

R43. Beräkna

a)  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} + \frac{1}{256} - \frac{1}{512} + \frac{1}{1024} - \frac{1}{2048}$  med hjälp av formeln för en geometrisk summa.

b)  $\sum_{k=1}^{100} (13 + 2k)$ .

R44. Utveckla till en summa

a)  $(x + 2y)^5$

b)  $(x - 2y)^5$

c)  $\left(x - \frac{1}{x}\right)^7$

R45. Bestäm koefficienten för  $x^3$ ,  $x^6$  och  $x^7$  i utvecklingen av

a)  $(x + 2)^{12}$

b)  $(x - 2)^{21}$

**Tips:** Använd räknedosa vid **(slutfaserna!)** av beräkningarna.

R46. Bestäm den konstanta termen i utvecklingen av

a)  $\left(x + \frac{2}{x}\right)^6$

b)  $\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^9$

c)  $\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^4$

### I (Induktion) : FÖ 5 (R47-R48)

R47. Bevisa med hjälp av induktion

- a) Formeln för den aritmetiska summan av  $n$  st termer.
- b) Formeln för den geometriska summan av  $n$  st termer för kvoten  $\neq 1$ .

R48. Bevisa med hjälp av induktion att för alla  $n \in \mathbb{Z}^+$

a)  $\sum_{k=1}^{2n-1} k = n^2$  för alla  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

b)  $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$  för alla  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

c)  $\sum_{j=1}^n j \cdot j! = (n+1)! - 1$  för alla  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

d)  $\sum_{m=0}^n m 2^m = (n-1)2^{n+1} + 2$  för alla  $n \in \mathbb{N}$ .

### FN Kap 1.7 och 2.6 (R49 – R77)

R49. Rita ett komplext talplan och markera läget av följande komplexa tal:

- a)  $3 + 2i$
- b)  $6 - 5i$
- c)  $-3 + i$
- d)  $-2i$
- e)  $4$
- f)  $-1 - 3i$

R50. Rita ett komplext talplan och markera de punkter  $z$  för vilka

- a)  $\operatorname{Re} z = 1$
- b)  $\operatorname{Im} z = -4$
- c)  $\operatorname{Re} z > 0$
- d)  $\operatorname{Im} z > 1$
- e)  $\operatorname{Im} z \leq 0$
- f)  $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$
- g)  $\operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z$
- h)  $\operatorname{Re} z \leq \operatorname{Im} z$

Rita randen heldragen om den tillhör det betraktade området och streckad om den inte tillhör området.

R51. Beräkna absolutbeloppet av följande komplexa tal och svara på så enkel form som möjligt.

- a)  $3 - 4i$
- b)  $0.5 + 1.2i$
- c)  $-24 + 7i$
- d)  $-1 + i\sqrt{2}$
- e)  $(-1 + \sqrt{2})i$
- f)  $1 + i\sqrt{3}$
- g)  $\sqrt{3} - i\sqrt{6}$
- h)  $1 + \sqrt{2} - i(1 - \sqrt{2})$

R52. Rita ett komplext talplan och markera de punkter  $z$  för vilka följande ekvationer och olikheter gäller.

- a)  $|z| = 2$
- b)  $|z| < 3$
- c)  $|z| \geq 1$
- d)  $|\operatorname{Re} z| = 1$
- e)  $|\operatorname{Im} z| \leq 1$
- f)  $|\operatorname{Re} z| = |\operatorname{Im} z|$

R53. Sätt  $u = 2 - 3i$  och  $v = -5 + 2i$ . Beräkna

- a)  $\operatorname{Re}(u + v)$
- b)  $\operatorname{Im}(u - v)$
- c)  $\operatorname{Im}(u + \bar{v})$
- d)  $\operatorname{Re}(\bar{u} + \bar{v})$







- R86. a) Visa att funktionen  $f(x) = x^2 + 6x + 16$ ,  $D_f = [-5, -3]$  har en invers funktion  $f^{-1}$  (t.ex. genom att bestämma inversen).  
 b) Beräkna  $f^{-1}(9)$   
 c) Rita i ett och samma koordinatsystem de båda kurvorna  $y = f(x)$  och  $y = f^{-1}(x)$   
 d) Ange deras  $D$  och  $V$ .

### FN Kap 2.3 (R87 - R97)

R87. Lös följande ekvationer

- a)  $\ln(x+3) - \ln(x+1) = \ln 2$                       b)  $2 \ln(x+2) = \ln x + 2 \ln 3$   
 c)  $\ln(x+3) + \ln(x+2) = 3 \ln 2$                       d)  $2 \ln x + \ln(x+3) = \ln(x+1) + \ln 2$

R88. Bestäm definitionsmängderna för funktionen  $f$  då  $f(x)$  är

- a)  $\ln \frac{x}{2-x}$     b)  $\ln(x^2 - x - 2)$   
 c)  $\ln\left(\frac{2}{3x} + \frac{5}{9-3x}\right)$                                       d)  $\sqrt{\ln x + \ln(4-x)}$

R89. Bestäm lösningsmängderna till olikheterna

- a)  $\ln(2x-5) > \ln(7-2x)$                               b)  $\ln(x^2-2) \leq \ln x$

R90. Antag att  $e^x = \sqrt{2}$  och  $e^y = \sqrt{8}$ . Förenkla så långt som möjligt:

- a)  $e^{x+y}$     b)  $e^{2x}$   
 c)  $e^{x-y}$     d)  $e^{4x-2y}$

R91. Förenkla följande uttryck (inte samma  $x$  och  $y$  som i föregående uppgift)

- a)  $\frac{e^{2x}e^{-y}}{e^{x-y}}$     b)  $\left(\frac{e^{-2x}e^y}{e^{-x}e^{2y}}\right)^{-1}$   
 c)  $\exp(\ln\sqrt{x+1} + \ln\sqrt{x-1})$                       d)  $2\ln(e^{\sqrt{x+1}}e^{\sqrt{x-1}})$

R92. Bestäm definitionsmängden för följande funktioner och undersök om de har en invers och bestäm den i så fall (inklusive  $D_{f^{-1}}$ ):

- a)  $\frac{e^x}{e^x+1}$     b)  $\ln(e^x - 1)$   
 c)  $\sqrt{\frac{e^x-1}{2-e^x}}$

R93. Förenkla följande uttryck

- a)  $32^{0.4}$     b)  $8^{-2/3}$   
 c)  $\left(\frac{x^{\sqrt{2}}}{x^{-\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}}$     d)  $\sqrt[4]{3\frac{6}{25}}$

R94. Talet  $16^{1/4} + 3^{4/3} + 1/2^{-3} + 2^{2/3-1/3} - 3^{1/3}/7^{-1}$  är ett heltal. Vilket?

R95. Lös följande ekvation  $x - 7x^{1/3} + 6 = 0$

R96. Förenkla följande uttryck

a)  $\frac{2^x 8^y}{2^{-x} 4^y}$

b)  $\left(\frac{3^{2x+4}}{9^{1+x}}\right)^{3/2}$

R97. Lös följande ekvationer

a)  $4^x - 2^{x+1} = 8$

b)  $3^x - 3^{x/2} = 6$

c)  $3^x = 9^{1-x}$

d)  $2^{x^2-3} = 4^x$

### FN Kap 2.4 (R98 – R115)

R98. Bestäm de exakta värdena på återstående trigonometriska funktioner, då

a)  $\cos \alpha = 3/5$  och  $\alpha$  ligger i första kvadranten.

b)  $\sin \alpha = 7/25$  och  $\alpha$  ligger i andra kvadranten.

c)  $\tan \alpha = 3$  och  $\alpha$  ligger i tredje kvadranten

d)  $\cot \alpha = -5/12$  och  $\alpha$  ligger i fjärde kvadranten.

R99. Bestäm exakta värden på  $\sin 15^\circ$ ,  $\cos 15^\circ$ ,  $\tan 15^\circ$  och  $\cot 15^\circ$

Ledning  $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ .

R100. Förenkla följande uttryck:

a)  $\sin(60^\circ + x) - \sin(60^\circ - x)$

b)  $\cos(30^\circ - x) - \cos(30^\circ + x)$

c)  $\cos(45^\circ - x) - \sin(45^\circ + x)$

d)  $\tan(135^\circ + x) + \tan(135^\circ - x)$

R101. Bevisa följande trigonometriska formler

a)  $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$

b)  $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha$

c)  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

d)  $\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ 1 - 2 \sin^2 \alpha \end{cases}$

R102. a)  $\alpha$  är en vinkel i andra kvadranten,  $\sin \alpha = 4/5$ . Bestäm  $\sin 2\alpha$  och  $\cos 2\alpha$

b)  $\cos \alpha = 1/3$ . Bestäm  $\cos 2\alpha$

c)  $\tan \alpha = 3/5$ . Bestäm  $\tan 2\alpha$

d)  $\alpha$  är en vinkel i tredje kvadranten,  $\tan \alpha = 1/7$ . Bestäm  $\sin 2\alpha$  och  $\cos 2\alpha$ .

R103. Bevisa likheterna:

a)  $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \tan \alpha$

b)  $\frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \sin 2\alpha$

c)  $\frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \cos 2\alpha$

R104. Bestäm  $r > 0$  och  $v \in ]-\pi, \pi]$ , så att  $a \sin x + b \cos x = r \sin(x + v)$  om

a)  $a = 1, b = \sqrt{3}$

b)  $a = -1, b = -\sqrt{3}$

c)  $a = -1, b = \sqrt{3}$

d)  $a = 1, b = -\sqrt{3}$

e)  $a = 3, b = -\sqrt{3}$

f)  $a = -4, b = -4$

R105. Använd ett av resultatet i föregående uppgift för att lösa ekvationerna

a)  $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 1$

b)  $\sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = 1$

i intervallet  $x \in [0, 2\pi[$

- R106. a) Lös ekvationerna i uppgift R105a men i intervallet  $]-\pi, \pi]$   
b) Lös ekvationen i uppgift R105b men i intervallet  $]-\pi, \pi]$

R107. Rita, med enhetscirkeln som utgångspunkt, en relevant figur som illustrerar lösningsmängden till ekvationen

- a)  $\sin x = a$                       b)  $\cos x = a$                       c)  $\tan x = a$

R108. Lös ekvationen

- a)  $\sin x = \sin \frac{\pi}{5}$                       b)  $\sin x = \frac{1}{2}$                       c)  $\sin x = 0$                       d)  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

R109 Lös ekvationen

- a)  $\cos x = \cos \frac{\pi}{20}$                       b)  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$                       c)  $2 \cos x = 1$                       d)  $\cos x = 0$

R110. Lös ekvationen

- a)  $\tan x = \tan \frac{2\pi}{7}$                       b)  $\tan x = -\sqrt{3}$                       c)  $\sqrt{3} \tan x = 1$   
d)  $\tan^2 x = 1$  (Ledning: Ekvationen är ekvivalent med  $\tan x = \pm 1$ )

R111. Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

- a)  $\sin 3x = \frac{1}{2}$                       b)  $\cos 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$   
c)  $\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$  om  $0 \leq x \leq \pi$

R112. Lös ekvationen genom att utnyttja att  $\cos v = \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$  eller  $\sin v = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$ .

- a)  $\cos 3x = \sin 4x$                       b)  $\cos \frac{x}{2} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $x \in \left[-\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$   
c)  $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

R113. Lös ekvationen

- a)  $\cos^2 x = \frac{1}{2}$                       b)  $\sin^2 x = \frac{3}{4}$   
c)  $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$  (Sätt t.ex. först  $\cos x = t$ )

R114. Lös ekvationen genom att bl.a. utnyttja trigonometriska ettan.

- a)  $2 \cos^2 x - \sin x = 1$                       b)  $\sin^2 x + \cos x = \frac{5}{4}$

R115. Lös ekvationen (Ledning: Utnyttja t.ex. formlerna för dubbla vinkeln samt trigonometriska ettan.)

- a)  $\cos x \sin x = 0$   
b)  $\sin 2x = 2 \sin x$   
c)  $\cos 2x = \cos^2 x + 3 \sin x$ ,  $x \in [-3\pi, 0[$   
d)  $\sin 2x = \sqrt{2} \cos x$ ,  $x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

### K: Vektorer, linjer och plan (R116 – R148)

Låt  $O\mathbf{e}$  vara ett ON-system. Koordinater för punkter och vektorer ges i  $O\mathbf{e}$  respektive  $\mathbf{e}$ .

R116. Låt  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$  och  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ . Bestäm koordinaterna för den vektor som bildas genom

a)  $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$

b)  $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$

c)  $2\mathbf{a} + \mathbf{e}_y$

d)  $\mathbf{b} - \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z$

R117. Undersök om vektorerna är parallella.

a)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  och  $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  och  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  och  $\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

d)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$  och  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

R118. Bestäm talet  $s$  så att vektorerna blir parallella

a)  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ s \end{pmatrix}$  och  $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ s \end{pmatrix}$  och  $\begin{pmatrix} -1 \\ s \\ 2 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 1/2 \\ s \\ -3/2 \end{pmatrix}$  och  $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 4 \\ 5-s \end{pmatrix}$

R119. Sätt  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  och  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ . Bestäm

a)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

b)  $\mathbf{a} \cdot (2\mathbf{a} - \mathbf{b})$

R120. Beräkna skalärprodukten  $(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z) \cdot (2\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z)$

R121. Låt vektorerna  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  och  $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Beräkna längden av vektorerna  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ ,

$2\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$

R122. Bestäm talet  $t$  så att vektorerna  $\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  och  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  blir vinkelräta.

R123. Bestäm  $t$  så att vektorerna blir vinkelräta.

a)  $\begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 2 \end{pmatrix}$  och  $\begin{pmatrix} 2 \\ t \\ -1 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} t \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  och  $\begin{pmatrix} t \\ t \\ -2 \end{pmatrix}$

R124. Beräkna vinkeln mellan

a)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  och  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$       b)  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  och  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

R125. Visa att vektorerna  $\mathbf{a} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  och  $\mathbf{c} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  är parvis vinkelräta och har längden 1.

R126. Två vektorer  $\mathbf{a}$  och  $\mathbf{b}$  med längderna 4 respektive 5 bildar vinkeln  $45^\circ$ . Hur lång är  
a) vektorn  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$       b) vektorn  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$

R127. Ge en ekvation i parameterform för den räta linje som går genom punkten  $P_0$  och har en riktningsvektor  $\mathbf{v}$  enligt

- a)  $P_0 = (1, -1, 2)$  och  $\mathbf{v} = (-4, 1, -3)$   
b)  $P_0 = (3, 1, 0)$  och  $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$   
c)  $P_0 = (0, 0, 0)$  och  $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$

R128. Bestäm tre skilda punkter på den räta linjen  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $t \in \mathbf{R}$

R129. Undersök om punkten  $(1, -2, 2)$  ligger på den räta linjen.

a)  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $t \in \mathbf{R}$       b)  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 18 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $t \in \mathbf{R}$

R130. Bestäm en ekvation för den räta linje som går genom punkterna

- a)  $(4, 2, -1)$  och  $(0, 3, -1)$       b)  $(1, 0, -5)$  och  $(0, 0, -1)$

R131. Bestäm en ekvation för den räta linje som går genom punkten  $(3, -2, 1)$  och är parallell med den räta linjen genom punkterna  $(0, 2, -3)$  och  $(3, -2, -1)$ .

R132. Undersök om de räta linjerna skär varandra och bestäm i så fall skärningspunkten.

a)  $\begin{cases} x = 0 + 2t_1 \\ y = 7 - t_1 \\ z = 5 - 2t_1 \end{cases}$ ,  $t_1 \in \mathbf{R}$  och  $\begin{cases} x = 3 - t_2 \\ y = 1 - t_2 \\ z = 11 + t_2 \end{cases}$ ,  $t_2 \in \mathbf{R}$

b)  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $t_1 \in \mathbf{R}$  och  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ ,  $t_2 \in \mathbf{R}$

c)  $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$ ,  $t \in \mathbf{R}$  och  $\begin{cases} x = 8 - t \\ y = 2 + t \\ z = 7 - t \end{cases}$ ,  $t \in \mathbf{R}$

R133. Bestäm en ekvation för det plan som går genom punkten  $P_0$  och som har en normalvektor  $\mathbf{n}$ .

a)  $P_0 = (2,4,5)$  och  $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$                       b)  $P_0 = (0,0,0)$  och  $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

R134. Ange en normalvektor till planet.

a)  $4x + y - 3z = -10$                       b)  $y + 8z = 0$   
c)  $x + 2 = 0$                                   d)  $z - 1 = 0$

R135. Bestäm ekvationen för ett plan går genom punkten  $(1,2,5)$  och har en normal med ekvationen

a)  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$                       b)  $\begin{cases} x = & - t \\ y = 300 + 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$

R136. Bestäm en ekvation för det plan som går genom punkten  $(1,2,3)$  och är parallellt med

a)  $xy$ -planet                      b)  $yz$ -planet

R137. Bestäm en ekvation för det plan som är parallellt med planet  $2x - y + 2z = -3$  och som går genom

a) origo                                  b) punkten  $(2,1,1)$

R138. Bestäm en ekvation för det plan som går genom punkterna

a)  $(1,1,0)$ ,  $(2,0,0)$  och  $(-1,-1,3)$   
b)  $(3,0,0)$ ,  $(0,2,0)$  och  $(0,0,1)$

R139. Bestäm skärningspunkten mellan den räta linjen  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  och planet

a)  $x - z = 0$                       b)  $x - y + 2z - 3 = 0$

R140. Bestäm skärningspunkten mellan den räta linjen  $\begin{cases} x = 7 + t \\ y = 2 - 4t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$  och

a)  $xy$ -planet                      b)  $xz$ -planet                      c)  $yz$ -planet

R141. Bestäm skärningspunkten mellan planet  $2x + 3y + 4z + 9 = 0$  och

a)  $x$ -axeln                      b)  $y$ -axeln                      c)  $z$ -axeln

R142. Beräkna avståndet från punkten  $(2,1,-3)$  till planet

a)  $x - 2y + z = 0$                       b)  $3x - y + 7 = 0$   
c)  $4x + 3y - 2 = 0$                       d)  $y + 5 = 0$

R143. Beräkna avståndet mellan de parallella planen  $2x - 3y - 4z = 1$  och  $2x - 3y - 4z = 14$ .

R144. Bestäm vinkeln mellan

a) linjerna  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$  och  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) linjen  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  och y-axeln

R145. Bestäm vinkeln mellan planen  $x + y + 2z = 12$  och  $2x - y + z - 3 = 0$ .

R146. Bestäm koordinaterna för den ortogonala projektionen av punkten  $(2, -2, 1)$  på

a) planet  $x + y - z = 0$

b) planet  $x + y - z = 5$

c) linjen  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

d) linjen  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

R147. Bestäm koordinaterna för speglingen av punkten  $(2, -2, 1)$  i

a) planet  $x + y - z = 0$

b) planet  $x + y - z = 5$

c) linjen  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

R148. Bestäm på formen  $Ax + By + Cz = D$  ekvationen för det plan som innehåller punkterna

$P_1 = (2, -3, 0)$  och  $P_2 = (2, -2, 2)$  och är parallellt med linjen  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$ .

# TNA001 Matematisk grundkurs för ED, KTS och MT

## Repetitionsuppgifter – facit

- R1. Endast d är sann
- R2.  $M_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $M_2 = \{4, 6, 8, 10, 12\}$   
 a)  $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12\}$  b)  $\emptyset$
- R3. a) 27 b)  $-39/20$
- R4. a)  $x^2 + 13x/6 + 1/3$  b)  $-s^2/8 + 11s/6 - 4$   
 c)  $a^3 + b^3$  d)  $a^3 - b^3$
- R5. a)  $9/25 - 4x/5 + 4x^2/9$  b)  $4x^2/25 + 12x/25 + 9/25$   
 c)  $4y^2 - 1$  d) 4  
 e) 11 f)  $x^2/25 - 9/25$
- R6. a)  $4x^2 + 12x + 9$  b)  $-s^2 + 8s - 16$   
 c)  $-9x^2/4 + 3x - 1$  d)  $0.01x^2 - 1$
- R7. a)  $3 + 2\sqrt{2}$  b)  $3 - \sqrt{3}$  c)  $1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$   
 d)  $\sqrt{5} - 2$  e)  $\frac{\sqrt{5}}{8}$
- R8. a)  $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$  b)  $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$   
 c)  $x^2 + y^2/4 + z^2/9 - xy + 2xz/3 - yz/3$  d)  $1 + 6x + 12x^2 + 8x^3$   
 e)  $y^3/27 - y^2/3 + y - 1$
- R9. a)  $(y + 2x)(y - 2x)$  b)  $x(x + 1)^2$   
 c)  $x^2(x - 1)^2$  d)  $(x + y)(a - b)$   
 e)  $(a - b)(c - 1)$  f) Ingen gemensam faktor finns.
- R10. a)  $x - 1$  b)  $\frac{3x + 2y}{3x - 2y}$   
 c)  $ax + 1$  d)  $-t$
- R11. a)  $\frac{b}{a + b}$  b)  $\frac{2}{x - 1}$  c)  $\frac{1}{x}$   
 d)  $\frac{x + y}{x - y}$  e)  $\frac{ab}{b - a}$  f)  $\frac{p - 3}{3}$   
 g)  $2x + h$
- R12. a)  $y = \frac{3}{4}x + \frac{17}{4}$  b)  $y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$   
 c)  $y = 18$  d)  $x = -3$
- R13. a)  $\left(-\frac{17}{3}, 0\right)$  resp.  $\left(0, \frac{17}{4}\right)$  b)  $\left(\frac{1}{5}, 0\right)$  resp.  $\left(0, \frac{1}{3}\right)$   
 c) Skärning med x-axeln saknas. Skärning med y-axeln i  $(0, 18)$   
 d) Skärning med x-axeln i  $(-3, 0)$ . Skärning med y-axeln saknas.
- R14. a)  $y = -\frac{4}{3}x + \frac{19}{3}$  b)  $y = \frac{3}{5}x - \frac{21}{5}$   
 c)  $x = -3$  d)  $y = 43$
- R15. a)  $(x + 3/2)^2 - 13/4$  b)  $(x - 9/2)^2 - 1/4$  c)  $(x - 3/10)^2 + 1/100$   
 d)  $-(x + 1/4)^2 + 1/16$  e)  $3(x - 1/3)^2 + 2/3$  f)  $-2(x - 5/4)^2 + 9/8$
- R16. a)  $m = (-3/2, -13/4)$ , d.v.s. minsta värde =  $-13/4$  och fås för  $x = -3/2$ .  
 b)  $m = (9/2, -1/4)$  c)  $m = (3/10, 1/100)$   
 d)  $M = (-1/4, 1/16)$  d.v.s. största värde =  $1/16$  och fås för  $x = -1/4$ .  
 e)  $m = (1/3, 2/3)$  f)  $M = (5/4, 9/8)$

- R17. a)  $x_1 = 3, x_2 = 2$   
 c)  $x_1 = 0, x_2 = -1/2$
- R18. a)  $x = 3/2 \pm \sqrt{3}/2$   
 c)  $x_1 = 1/2, x_2 = -7/2$
- R19. a)  $x_{1,2} = \pm 3, x_{3,4} = \pm \sqrt{5}$   
 c)  $x_1 = -1, x_2 = \sqrt[3]{9}$
- R20. a)  $x^2 + y^2 = 1$   
 c)  $(x-1)^2 + y^2 = 4$   
 e)  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$   
 g) På cirkeln i c)
- R21. a) Cirkel med medelpunkt i (4,0) och radie 2.  
 b) Cirkel med medelpunkt i (-4,2) och radie  $\sqrt{3}$ .  
 c) Cirkel med medelpunkt i (-1,-1) och radie 2  
 d) Linjen  $y = -3/8$   
 e) Linjen  $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$
- R22. a)  $q(x) = x - 1, r = 2$   
 c)  $q(x) = -x^2 - x - 3, r = 0$
- R23. a)  $x + 3 + \frac{7}{x-2}$
- R24. a) Ty  $f(-1) = 0$  (faktorsatsen)
- R25. a)  $(x-1)(x-3)(x+2)$   
 c)  $-(x-1)(x-4)(x-8)$
- R26.  $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = -5$
- R27. a)  $x_1 = 1, x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$
- R28.  $x = 4$  (dubbelrot) eller  $x = -3$
- R29. a)  $3/4$
- R30. a)  $] -2, 1[$
- R31. a)  $] 0, 1[ \cup ] 2, \infty [$
- R32. a)  $L = ] -1/2, 0[ \cup ] 1, \infty [$   
 c)  $L = ] -2, 0[$
- R33. a)  $x = 4$   
 c)  $\emptyset$
- R34. a)  $] -\infty, 4]$   
 c)  $\mathbf{R}$  (alla reella tal)
- R35. a) 332
- R36. 1325 kr
- R37. 50400
- R38.  $n = 5$  eller  $n = 8$
- R39. a) 54, 108, 216, 432  
 c) 54, -108, 216, -432
- R40. a)  $x = 1, y = 8$
- R41.  $a_k = 6 \cdot 5^{k-4} \quad s(7) = \frac{117186}{125}$
- R42. a) Under år 2057
- R43. a)  $\frac{1365}{2048}$
- b)  $x_1 = 1/2, x_2 = -2/3$   
 d)  $x_1 = 1, x_2 = -1/4, x_3 = -84$
- b)  $x_{1,2} = 2/3$   
 d)  $x_1 = 11, x_2 = 22$
- b)  $x_{1,2} = \pm \sqrt{3}$
- b)  $x^2 + y^2 = 9$   
 d)  $x^2 + (y+2)^2 = 1$   
 f)  $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 2$   
 h) På cirkeln i e)
- b)  $q(x) = x^2 + 2x - 7, r = 22$
- b)  $17x - 51 + \frac{158}{x+3}$
- c) Ty  $f(-1) = 0$
- b)  $-x(x-1/2)(x+1/4) = -\frac{x}{8}(2x-1)(4x+1)$
- b)  $x_1 = 1, x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$   
 c)  $x_1 = 3, x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$
- b) 2/9  
 c) -1  
 d) 1
- b)  $] -2, 1/2[$   
 c)  $] -5, -1/2] \cup [3, \infty$
- b)  $] -\infty, 0[ \cup ] 16, \infty [$
- b)  $L = ] -\infty, -2] \cup ] -1, 0] \cup [3, \infty [$   
 d)  $] -\infty, -1] \cup \{3\}$   
 e)  $] -1, 1/2 [ \cup [ 3/2, 3]$
- b)  $x_1 = 3, x_2 = 0$   
 d)  $x_{1,2} = -1, x_3 = 1, x_4 = -3$
- b)  $] 0, 3[$   
 d)  $] -\infty, -3] \cup \{-1\} \cup [1, \infty [$
- b) 670
- b) 54, 36, 24, 16  
 d) 54, -18, 6, -2
- b)  $x = 4/3, y = 9/2$
- b) Aldrig
- b) 11400



- R71. a)  $3e^{i\frac{\pi}{2}}$       b)  $4e^{i\frac{3\pi}{2}}$       c)  $2e^{i0}$   
 d)  $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$       e)  $e^{i\frac{2\pi}{3}}$       f)  $5e^{i\pi}$
- R72. a)  $-2$       b)  $-2i$       c)  $-1/2 + i\sqrt{3}/2$   
 d)  $2\sqrt{3} + 2i$       e)  $1 - i$       f)  $-2\sqrt{3} + 2i$

R74.  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ ,  $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

R75. 64

R76.  $-4i/27$

R77. a) Alla komplexa tal  $z$  som ligger på linjen  $y = 3$

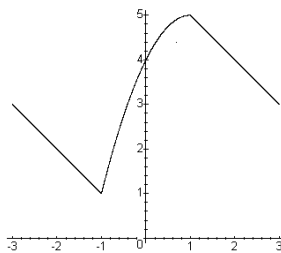
b) Alla komplexa tal  $z$  som ligger på linjen  $y = 2x - 3/2$

c) Alla komplexa tal  $z$  som ligger på och innanför cirkel med medelpunkt  $i$  ( $0,1$ ) och radie 2.

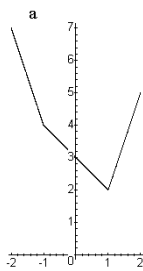
R78. a)  $D = [-3, 1]$ ,  $V = [0, 2]$       b)  $D = ]-3, 1[$ ,  $V = \left[\frac{1}{2}, \infty\right[$

R79. a)  $2x^2 + 4x - 1$ ,  $V = [-3, \infty[$       b)  $4x^2 - 1$ ,  $V = [-1, \infty[$       c)  $4x - 3$ ,  $V = ]-\infty, \infty[$

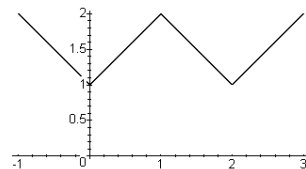
R80.



R81.

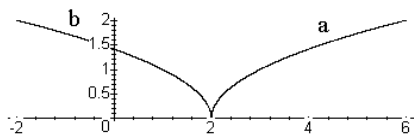


b



R82.  $f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{x-3}$ . Båda har samma  $D$  och  $V : \mathbb{R} \setminus \{3\}$

R83.



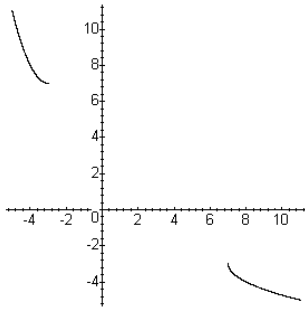
R84. a)  $f^{-1}(y) = \frac{4-2y}{3}$ ,  $y \in [-10, 2]$

b)  $f^{-1}(x) = \frac{3x^2-3}{4}$ ,  $D_{f^{-1}} = [1, \sqrt{5}]$ , gemensam punkt  $\left(\frac{2+\sqrt{13}}{3}, \frac{2+\sqrt{13}}{3}\right)$ .

- R85. a) 0      b) 1  
 c) -1      d) 2

R86. b)  $-3 - \sqrt{2}$

c)



d)  $D_f = V_{f^{-1}} = [-5, -3]$   $V_f = D_{f^{-1}} = [7, 11]$

R87. a) 1

b) 1 eller 4

c)  $\frac{\sqrt{33} - 5}{2}$

d) 1

R88. a)  $]0, 2[$

b)  $]-\infty, -1[ \cup ]2, \infty[$

c)  $]-\infty, -2[ \cup ]0, 3[$

d)  $[2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}]$

R89. a)  $]3, 3.5[$

b)  $] \sqrt{2}, 2 ]$

R90. a) 4

b) 2

c)  $1/2$

d)  $1/2$

R91. a)  $e^x$

b)  $e^{x+y}$

c)  $\sqrt{x^2 - 1}$

d)  $2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})$

R92. a)  $D_f = \mathbb{R} \cdot f^{-1}(x) = \ln \frac{x}{1-x}, x \in ]0, 1[$

b) Invers saknas.

c)  $D_f = ]0, \infty[, f^{-1}(x) = \ln(e^x + 1), D_{f^{-1}} = ]-\infty, \infty[$

R93. a) 4

b)  $1/4$

c)  $x^4$

d)  $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

R94. 10

R95. -27, 1 eller 8

R96. a)  $2^{2x+y}$

b) 27

R97. a) 2

b) 2

c)  $2/3$

d) 3 eller -1

R98. a)  $\sin \alpha = 4/5, \tan \alpha = 4/3, \cot \alpha = 3/4$

b)  $\cos \alpha = -24/25, \tan \alpha = -7/24, \cot \alpha = -24/7$

c)  $\sin \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}, \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}, \cot \alpha = \frac{1}{3}$

d)  $\sin \alpha = -12/13, \cos \alpha = 5/13, \tan \alpha = -12/5$

R99.  $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}, \cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$

R100. a)  $\sin x$

b)  $\sin x$

c) 0

d)  $-2/\cos 2x$

R102. a)  $\sin 2\alpha = -24/25, \cos 2\alpha = -7/25$

b)  $-7/9$

c)  $15/8$

d)  $\sin 2\alpha = 7/25, \cos 2\alpha = 24/25$

R104. a)  $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(x + \pi/3)$                       b)  $-\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(x - 2\pi/3)$   
 c)  $-\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(x + 2\pi/3)$                       d)  $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(x - \pi/3)$   
 e)  $3 \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2\sqrt{3} \sin(x - \pi/6)$                       f)  $-4 \sin x - 4 \cos x = 4\sqrt{2} \sin(x - 3\pi/4)$

R105. a)  $\pi/2$  eller  $7\pi/6$                       b)  $\pi/6, 7\pi/18, 5\pi/6, 19\pi/18, 3\pi/2$  eller  $31\pi/18$

R106. a)  $-5\pi/6$  eller  $\pi/2$                       b)  $-17\pi/18, -\pi/2, -5\pi/18, \pi/6, 7\pi/18$  eller  $5\pi$

R108. a)  $x = \pi/5 + 2n\pi$  eller  $x = 4\pi/5 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$                       b)  $\pi/6 + 2n\pi$  eller  $5\pi/6 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$   
 c)  $n\pi, n \in \mathbb{Z}$                       d)  $-\pi/3 + 2n\pi$  eller  $4\pi/3 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

R109. a)  $\pm\pi/20 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$                       b)  $\pm\pi/6 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

c)  $\pm\pi/3 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$                       d)  $\pi/2 + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

R110. a)  $2\pi/7 + n\pi, n \in \mathbb{Z}$                       b)  $-\pi/3 + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

c)  $\pi/6 + n\pi, n \in \mathbb{Z}$                       d)  $\pm\pi/4 + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

R111. a)  $\frac{\pi}{18} + n\frac{2\pi}{3}$  eller  $\frac{5\pi}{18} + n\frac{2\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$

b)  $-\frac{\pi}{24} + n\pi$  eller  $\frac{17\pi}{24} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

c)  $\frac{\pi}{20}, \frac{9\pi}{20}, \frac{17\pi}{20}$

R112. a)  $\frac{\pi}{14} + \frac{2n\pi}{7}$  eller  $\frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

b)  $0, \frac{4\pi}{3}$

c) Alla reella  $x$

R113. a)  $\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$                       b)  $\frac{\pi}{3} + n\pi$  eller  $\frac{2\pi}{3} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

c)  $2n\pi$  eller  $\pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

R114. a)  $\frac{3\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{6} + 2n\pi$  eller  $\frac{5\pi}{6} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$                       b)  $\pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

R115. a)  $\frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$                       b)  $n\pi, n \in \mathbb{Z}$

c)  $0, -\pi, -2\pi, -3\pi$                       d)  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$

R116. a)  $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$                       b)  $\begin{pmatrix} 1 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}$                       c)  $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$                       d)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

R117. a) Nej                      b) Nej                      c) Ja                      d) Nej

R118. a)  $s = -1/3$                       b)  $s = -2$                       c)  $s = 6$

R119. a)  $-9$                       b)  $37$

R120.  $3$

R121.  $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{5}, |\mathbf{2a} + \mathbf{b}| = \sqrt{26}, |\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}| = 3$

R122.  $t = 3/2$

R123. a)  $t = \pm 2$                       b)  $t = -1$  eller  $t = 2$

R124. a)  $\pi/3$                       b)  $\pi/2$

R126. a)  $\sqrt{41 + 20\sqrt{2}}$                       b)  $\sqrt{41 - 20\sqrt{2}}$

Tips: Utnyttja att det för en vektor  $\mathbf{u}$  gäller att  $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$  (vilket följer av att

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}||\mathbf{u}|\cos 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$ ).

R127. a)  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$                       b)  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$                       c)  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

R128. T.ex.  $t = 0$  ger oss punkten  $(0,0,3)$ ,  $t = 1$  ger punkten  $(1,-1,5)$ ,  $t = -10$  ger punkten  $(-10,10,-17)$

R129. a) Nej                      b) Ja (för  $t = -4$ )

R130. a)  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$       b)  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$

R131.  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$

R132. a) Nej

b) Ja, i punkten (2,1,4)

c) Ja, i punkten (6,4,5)

R133. a)  $x - y + 3z = 13$

b)  $6x + 3y + 2z = 0$

R134. a)  $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

R135. a)  $x - 2y + 2z = 7$

b)  $x - 2y + 2z = 7$

R136. a)  $z = 0$

b)  $x = 0$

R137. a)  $2x - y + 2z = 0$

b)  $2x - y + 2z = 5$

R138. a)  $3x + 3y + 4z = 6$

b)  $2x + 3y + 6z = 6$

R139. a)  $\left(-\frac{1}{3}, 6, -\frac{1}{3}\right)$

b)  $\left(\frac{19}{3}, -4, -\frac{11}{3}\right)$

R140. a)  $\left(\frac{20}{3}, \frac{10}{3}, 0\right)$

b)  $\left(\frac{15}{2}, 0, \frac{5}{2}\right)$

c) (0,30,-20)

R141. a)  $\left(-\frac{9}{2}, 0, 0\right)$

b) (0,-3,0)

c)  $\left(0, 0, -\frac{9}{4}\right)$

R142. a)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$

b)  $\frac{6\sqrt{10}}{5}$

c)  $\frac{9}{5}$

d) 6

R143.  $\frac{13}{\sqrt{29}}$

R144. a)  $\pi/2$

b)  $\pi/2$

R145.  $\pi/3$

R146. a)  $\left(\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

b) (4,0,-1)

c)  $\left(\frac{45}{31}, -\frac{9}{31}, \frac{54}{31}\right)$

d)  $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 2\right)$

R147. a)  $\left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$

b) (6,2,-3)

c) (1,1,3)

R148.  $3x - 2y + z = 12$