TNA001 - Matematisk grundkurs
Tentamensinformation och Övningstentamen
2011-09-29 Sixten Nilsson

Omfattning
Forsling-Neymark: Matematisk analys, en variabel, Kap 1, Kap 2.
Kompletterande materiel:

1. Baravdish/Nilsson 2011: Vektorer, linjer och plan Kap 1 - 4.
2. Induktionsbevis (distribuerat i samband med undervisningen - Föreläsning 5)

- På tentamen ges sju (7) uppgifter, som bedöms genom att varje uppgift poängsätts med 0 - 6 poäng. Om inte annat framgår av texten, skall **fullständig lösning** lämnas. Med detta menas att följande moment skall i *lämplig omfattning* ingå i lösningen:

  1. Lösningen skall ha förklarande text med förklaringar på vad som görs och varför det får göras. En hänvisning till teorin kan här vara lämpligt. Även en figur kan vara ett bra stöd i detta arbete.
  2. Lösningen skall ha en struktur som är lätt att följa.
  3. Lösningen skall innehålla en kalkyldel där det går att följa hur resultaten har uppkommit.
  4. Lösningen skall ha ett tydligt angivet svar/resultat som är kopplat till den fråga som är ställd.
  5. Svaret/resultatet skall där så är lämpligt utvärderas. T.ex. kan ju en enkel kontroll ibland avslöja ett orimligt svar! Kontroller behöver dock inte redovisas, såvida de inte specifikt efterfrågas eller är logiskt nödvändiga för att lösningen skall vara fullständig (t.ex. då man löser rotekvationer).

  Poängsättningen vid rättningen tar hänsyn till hur väl samtliga delar ovan är genomförda. (Jämför även med vilka krav som ställts på era lösningar på inlämningsuppgifterna och den återkoppling som ni fått på dessa.)

- Inga hjälpmedel är tillåtna (förutom skriv- och ritmateriel, såsom passare, linjal och gradskiva - dock ej med trigonometriska funktioner/funktionsvärden)
  Observera alltså att miniräknare INTE är tillåtet hjälpmedel.

- På tentamen ges betyg enligt följande:

Betyg	Poäng på tentamen (inklusive bonuspoäng)
5	≥ 36, varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
4	28 – 35, varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna
3	20 – 27, varav minst 2p på var och en av de fem första uppgifterna

Var och en av de fem första uppgifterna på tentamensskrivningen i TNA001 kommer, helt eller delvis, att omfatta ett av nedanstående sex områden i kursen. På dessa fem första uppgifter måste du, för att nå godkänt resultat, ha minst 2 poäng på varje uppgift (se även tabellen ovan). Uppgift 6 och 7 kommer att omfatta blandande kursmoment. Observera att de sex områdena nedan tillsammans inte täcker in alla kursmoment.

1. **Ekvationer och olikheter** med polynom, rotuttryck, rationella uttryck, absolutbelopp. Faktorsatsen, faktoriseringar, funktioner allmänt.
   Inverser – allmänt: Samband mellan egenskaper hos funktion och dess ev. invers, bestämma ev. invers.

2. **Komplexa tal**: $a + bi$ form (rektangulär form), räkning med komplexa tal, komplexa exponentialfunktioner, polär form, tolkningar i komplexa talplanet, begreppskunskap (absolutbelopp, Re, Im, konjugat etc.), omskrivningar mellan polär och rektangulär form, Eulers formler, de Moivres formel.

3. **Naturliga logaritmen, exponentialfunktioner, potensfunktioner**: Egenskaper, räkneregler, ekvationer och olikheter.

4. **Talföljder och Summor:** Sigmasymbolen, aritmetiska och geometriska talföljder och summor. **Induktionsbevis:** Princip samt kunna utföra sådant bevis.

5. **Trigonometri**: Radianer, enhetscirkeln, trigonometriska formler, funktionerna cos, sin, tan och cot och deras egenskaper. Omskrivningen $A\sin x + B\cos x = C\sin(x+v)$, ekvationer och olikheter. **Arcusfunktionerna**: Definitioner, samband, enkla ekvationer.

6. **Vektorer, linjer och plan**: Linjära ekvationssystem (Gausselimination), begreppskunskap och räkneregler för geometriska vektorer, skalärprodukt, ortogonalitet, projektioner, ekvationer för linjer och plan, skärningar, vinklar, avstånd, etc.

Övningstentamen (Lösningsförslag finns på kurshemsidan senast fredag v 41)

(I anmärkningarna till uppgift 1-5 anges *exempel* på vad som krävs för att få två poäng på resp. uppgift. Sådana anmärkningar kommer inte att finnas vid tentamen.)

1. a) Lös ekvationen $|x-3| + \frac{1}{2}|x+1| - 2 = 0$.

   b) Visa att $f(x) = |x-3| + \frac{1}{2}|x+1| - 2$ saknar invers.

   c) Bestäm definitionsmängden, D_g, till $g(x) = \sqrt{\dfrac{\arctan(x-2)}{2x^2+4x-30}}$.

Anm: För 2p krävs t.ex. att lösningsprincipen för ekvationen i a) är korrekt eller att du har ett korrekt resonemang vid lösningen av b)- eller c)-uppgiften.

2. a) Bestäm $|z|$ om $z = \dfrac{1-i}{2i}$.

   b) Beräkna $\left(\dfrac{1-i}{2i} + 1 + i\right)^{16}$ på förenklad form.

   c) Markera i ett komplext talplan alla komplexa tal z som uppfyller villkoret $|z-1| = 2|z-i|$. Analytisk lösning krävs.

Anm: För två poäng krävs t.ex. att a)-uppgiften är korrekt eller att du på b) har visat att du förstår principen (de Moivres formel). En bra behandling av c)-uppgiften kan också räcka.

3. a) Definiera 1 radian.

   b) Illustrera, med hjälp av relevanta figurer i enhetscirkeln, sambanden
   $$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \text{ respektive } \sin(-x) = -\sin x .$$

   c) Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

Anm: För två poäng krävs t.ex. att du klarar b)-uppgiften (det räcker dock inte med ”bara” a)-uppgiften). En bra bearbetning av ekvationen i c) kan också räcka.

4. Ange, **med motivering**, för vart och ett av följande tre påståenden (A, B och C) om det är sant eller falskt. **(OBS! Svar utan motivering bedöms med 0 p.)**

A. De två planen $4x - y + 2z = 18$ och $3x + 2y - 5z = 1$ är vinkelräta. (ON-bas)

B. De två planen $x + 2y + z = 3$ och $x - 2y + 3z = 3$ skär varandra längs den räta linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$. (ON-bas)

C. Linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$, skär *xy*-planet i punkten $(4, -1, 0)$. (ON-bas)

Anm: För två poäng krävs t.ex. att ett av påståendena har behandlats korrekt.

5. Låt $f(x) = \ln(x+1) + \ln(1-x) - \ln 3 - 2\ln x$

a) Bestäm definitionsmängden till funktionen till f.

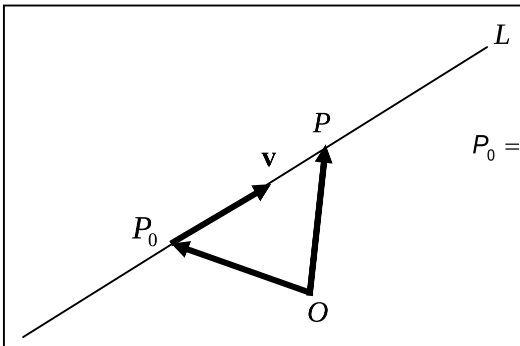
b) Lös ekvationen $f(x) = 0$.

c) Lös olikheten $e^{2x} - 2e^{x} - 8 \geq 0$.

Anm: För två poäng krävs t.ex. att du presenterar en bra lösningsgång till ekvationen eller olikheten. Det räcker dock inte med att ”bara” lösa a)-uppgiften korrekt.

6. a) Visa, t.ex. med utgångspunkt från figuren nedan, att en linjes ekvation i tre dimensioner kan på parameterform skrivas

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}, \text{ där } t \in \mathbf{R}.$$



$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P = (x, y, z)$

$O =$ origo , $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

b) Beräkna vinkeln mellan de två linjerna $\begin{cases} x = 8 + 2t \\ y = 1 \\ z = 4 + 2t \end{cases}$ och $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$.

c) Beräkna avståndet mellan punkten $(1, 1, -1)$ och planet $x + 2y - z = 0$.

7. Har ekvationen $\arccos(x^2 + 2x - 2) = \ln(x - 1)$ någon reell lösning? Bestäm i så fall denna.