TNA001
Övningstentamen HT 2011
Lösningsskisser

1a) $f(x)=0 \Leftrightarrow |x-3|+\frac{1}{2}|x+1|-2=0$

Vi får tre olika fall:

$x\le -1:\ 3-x-\frac{x}{2}-\frac{2}{2}-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$, duger ej ty $x=\frac{1}{3}>-1$.

$-1\le x\le 3: 3-x+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}-2=0 \Leftrightarrow x=3$, som duger.

$x\ge 3: x-3+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}-2=0 \Leftrightarrow x=3$, som duger

Svar: $x=3$

b) Eftersom vi t.ex. har att $f(0)=f(4)=\frac{3}{2}$ så är inte f omvändbar, och har därmed inte invers, v.s.v.

c) Vi faktoriserar uttrycket i nämnaren (sök dess nollställen) och får $2x^2+4x-30=2(x+5)(x-3)$.
Funktionen g är definierad om uttrycket under rottecknet är ≥ 0 .
Vi studerar detta uttryck i ett teckenschema

		-5		2		3	
$\arctan(x-2)$	−	−	−	0	+	+	+
2	+	+	+	+	+	+	+
$x+5$	−	0	+	+	+	+	+
$x-3$	−	−	−	−	−	0	+
$\sqrt{\frac{\arctan(x-2)}{2x^2+4x-30}}$	−	Ej def	+	0	−	Ej def	+

Av teckenschemat ser vi att $D_g =]-5,2] \cup]3,\infty[$

Svar: $=]-5,2] \cup]3,\infty[$

2. a) Med $z=\frac{1-i}{2i}$ får vi $|z|=\left|\frac{1-i}{2i}\right|=\frac{|1-i|}{|2i|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **Svar:** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\left(\frac{1-i}{2i}+1+i\right)^{16}=\left(\frac{(1-i)(-2i)}{2i(-2i)}+1+i\right)^{16}=\left(\frac{-2i-2}{4}+1+i\right)^{16}=\left(\frac{1}{2}(1+i)\right)^{16}=$

$=\frac{1}{2^{16}}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{16}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{16}=\frac{1}{2^8}e^{i4\pi}=\frac{1}{2^8}\cdot 1=\frac{1}{256}$ **Svar:** $\frac{1}{256}$

c) Låt $z=x+iy \Rightarrow |z-1|=2|z-i| \Leftrightarrow |x+iy-1|=2|x+iy-i| \Leftrightarrow |(x-1)+iy|=2|x+(y-1)i| \Leftrightarrow$

$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=2\sqrt{x^2+(y-1)^2} \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=4\left(x^2+(y-1)^2\right) \Leftrightarrow$

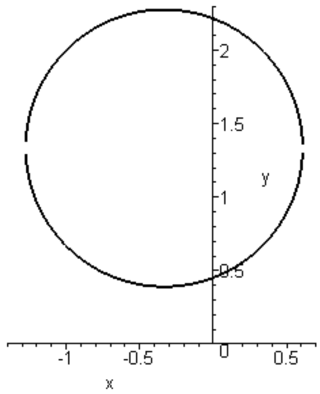
$x^2-2x+1+y^2=4x^2+4y^2-8y+4 \Leftrightarrow 3x^2+2x+3y^2-8y=-3 \Leftrightarrow$

$x^2+\frac{2}{3}x+y^2-\frac{8}{3}y=-1 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{16}{9}=-1 \Leftrightarrow$

$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$,

vilket motsvarar en cirkel med medelpunkt i $\left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$ och radie $\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Svar: Alla komplexa tal i det komplexa talplanet som ligger på en cirkel med medelpunkt i $\left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$ och radie $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, d.v.s. alla komplexa tal z som uppfyller villkoret $\left|z-\left(-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}i\right)\right|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (se figur).



3. a och b: Se kursboken.
c) Lösningsförslag

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(-x-\frac{\pi}{4}\right)\right) \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$x-\frac{\pi}{6}=x+\frac{3\pi}{4}+n2\pi$$

eller

$$x-\frac{\pi}{6}=-\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)+n2\pi$$

Här saknar det första sambandet lösning i x (varför?)

Det andra sambandet ger att $x=-\frac{7\pi}{24}+n\pi$, som är de sökta lösningarna.

Svar: $x=-\frac{7\pi}{24}+n\pi$, $n\in \mathbf{Z}$

4.

A: SANT ty skalärprodukterna av planens normalvektorer = $\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix}=12-2-10=0$, och då är normalvektorerna vinkelräta, vilket innebär att planen också är vinkelräta.

B: SANT ty $\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&3\\1&-2&3&3\end{array}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&3\\0&4&-2&0\end{array}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x=3-4t\\y=t\\z=2t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix}$, $t\in\mathbf{R}$

C: SANT ty xy-planet har ekvationen $z=0$ och då har vi villkoret
$-2+t=0 \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow x=2+2=4,\ y=1+2\cdot(-1)=-1$

Svar: Alla tre påståendena är sanna.

5.

a) $D_f=]-1,\infty[\cap]-\infty,1[\cap]0,\infty[=]0,1[$ **Svar:** $D_f=]0,1[$

b) $\ln(x+1)+\ln(1-x)-\ln 3-2\ln x=0$ har enligt ovan $D_{ekv}=]-1,\infty[\cap]-\infty,1[\cap]0,\infty[=]0,1[$, d.v.s. ev. lösningar måste tillhöra detta intervall.

Om $x\in]0,1[$ så gäller $\ln(x+1)+\ln(1-x)=\ln 3+2\ln x \Leftrightarrow \ln(x+1)(1-x)=\ln 3x^2 \Leftrightarrow$

$1-x^2=3x^2 \Leftrightarrow 4x^2=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ ($x=-\frac{1}{2}$ är inte lösning ty detta värde ligger utanför D_{ekv}).

Svar: $x=\frac{1}{2}$

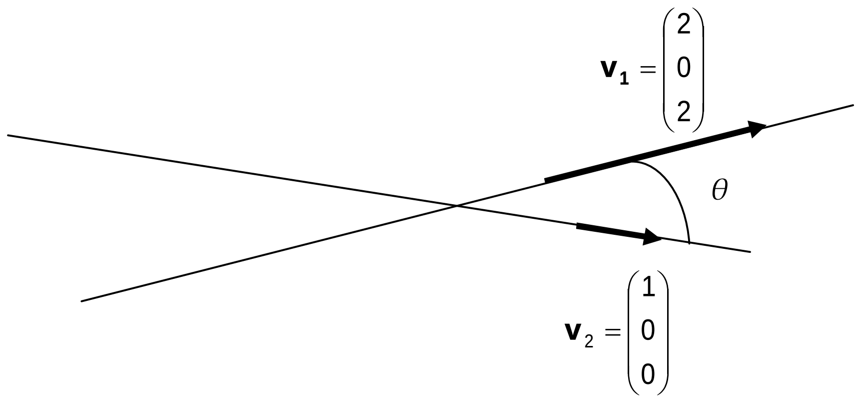
c) Sätt $e^x=t>0$ så får vi

$t^2-2t-8\geq 0, t>0 \Leftrightarrow (t+2)(t-4)\geq 0, t>0 \Leftrightarrow (e^x+2)(e^x-4)\geq 0, e^x>0 \Leftrightarrow x\geq \ln 4=2\ln 2$, ty observera att $e^x+2>0$ för alla $x\in \mathbb{R}$, vilket innebär att faktorn e^x-4 avgör tecknet för VL.

Svar: $x\geq 2\ln 2$

6. a) Se t.ex. kompendiet ”Vektorer linjer och plan”.

b)



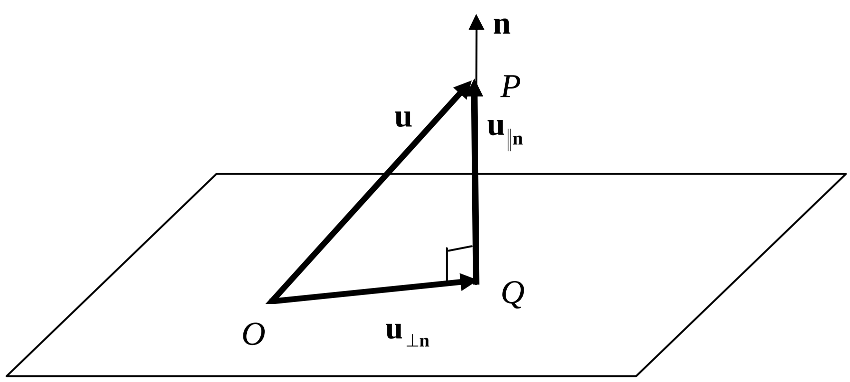
Om θ är vinkeln mellan linjernas riktningsvektorer (se figur) så har vi

$$\cos\theta=\frac{\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{2^2+0^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+0^2}}=\frac{2+0+0}{\sqrt{8}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$ vilket innebär att den sökta vinkeln $\theta=\frac{\pi}{4}$.

(**Anm:** Med vinkeln mellan två linjer avses den minsta vinkeln)

Svar: $\frac{\pi}{4}$

c) Först en skiss!



Eftersom origo (0,0,0) satisfierar planets ekvation ligger origo i planet.

Låt $P=(1,1,-1)$ och **u =** $\overrightarrow{OP}$ = $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$. Det sökta avståndet är $|\overrightarrow{QP}|=|\mathbf{u}_{\|\mathbf{n}}|$ (se figuren ovan)

Projektionsformeln ger oss

$$\mathbf{u}_{\|\mathbf{n}} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\right)\mathbf{n} = \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}}{1^2+2^2+(-1)^2}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \frac{1+2+1}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \frac{4}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

Alltså är avståndet mellan punkten och planet $= \left|\mathbf{u}_{\|\mathbf{n}}\right| = \frac{2}{3}\sqrt{6}$ l.e. **Svar:** $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ l.e.

7. Vi undersöker definitionsområdena för ekvationens båda led.

VL:

$\arccos(x^2+2x-2)$ är definierat $\Leftrightarrow -1 \le x^2+2x-2 \le 1$. Vi undersöker först vänstra och högra olikheten var för sig.

Vänstra olikheten: $-1 \le x^2+2x-2 \Leftrightarrow x^2+2x-1 \ge 0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \left(x-(-1+\sqrt{2})\right)\left(x-(-1-\sqrt{2})\right) \ge 0 \Leftrightarrow$

(gör teckenstudium) $x \in \left]-\infty,-1-\sqrt{2}\right] \cup \left[-1+\sqrt{2},\infty\right[$

Högra olikheten: $x^2+2x-2 \le 1 \Leftrightarrow x^2+2x-3 \ge 0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (x+3)(x-1) \ge 0 \Leftrightarrow$

(gör teckenstudium) $x \in [-3,1]$.

Båda olikheterna är således uppfyllda för $x \in \left[-3,-1-\sqrt{2}\right] \cup \left[-1+\sqrt{2},1\right]$, vilket är arccosfunktionens definitionsmängd = D_{VL} .

HL:

$\ln(x-1)$ är definierat för $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$, d.v.s. vi har $D_{HL} =]1,\infty[$.

Vi ser nu att $D_{VL} \cap D_{HL} = \emptyset$, vilket innebär att ekvationen saknar lösning.

Svar: Ekvationen saknar lösning.