TNA001
Kontrollskrivning 4 – Svar och lösningar
2011-10-03 Sixten Nilsson

---

1. a) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

   b) $|\mathbf{u}| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

   c) Om θ är vinklen mellan vektorerna **u** och **v** så gäller det att $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos\theta \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}$.
   I vårt fall har vi alltså

$$\cos\theta = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{3}} = \frac{-4+0+2}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{3}} < 0$$

   $\Rightarrow \theta$ är trubbig.

   Anm: Vinklens ”karaktär” avgörs alltså direkt av tecknet på skalärprodukten.

   Svar: a) $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $2\sqrt{5}$ l.e. c) Trubbig

2. **A är sant**, ty linjens riktningsvektor är parallell med planets normalvektor.
   B är falskt, ty skalärprodukten mellan linjernas riktningsvektorer $= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 + 3 + 4 = 9 \neq 0$
   C är falskt, ty planen har samma normalvektor (d.v.s. planen är parallella).
   D är sant, ty punktens koordinater satisfierar linjens ekvation (med $t = 2$).
   E är sant, ty punktens koordinater satisfierar planets ekvation.

   Svar: A, D och E

3. **A är sant**, ty $|\mathbf{u}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$ och $|\mathbf{v}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$.
   B är sant, ty

$$\mathbf{u}_{\parallel\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left(\sqrt{6}\right)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \cdots = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\mathbf{v}$$

   och $0 < \frac{1}{2} < 1$.
   C är sant, ty $\mathbf{v}_{\parallel\mathbf{u}}$ är (självklart) parallell med **u**, och eftersom $\mathbf{u} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ så är **u** parallell med $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, vilket medför att även $\mathbf{v}_{\parallel\mathbf{u}}$ är parallell med $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   Svar: A, B och C (d.v.s. alla)

4. Systemet kan skrivas

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

   Svar: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ eller $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

5. Låt $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ vara en vektor som är ortogonal mot de givna planen med normalvektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ respektive $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Då skall det gälla att

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{t}{3} \\ B = -\dfrac{2t}{3} \\ C = t \end{cases}$$

Vi har alltså

$$\mathbf{n} = \frac{t}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

och kan (t.ex.) välja vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ som normal till planet Π.

Eftersom punkten (3,2,1) är en punkt i planet Π har vi den sökta ekvationen

$$1(x-3) - 2(y-2) + 3(z-1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 3z = 2$$

Kontroller visar att vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ är ortogonal mot både vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, samt att punkten (3,2,1) satisfierar den framtagna ekvationen för planet Π.

Svar: Planet Π har ekvationen $x - 2y + 3z = 2$.