TNA001
Kontrollskrivning 4, 2010-10-04.
Svar med kommentarer/Lösningar

1. **A är falskt,** ty $|2\mathbf{v}-\mathbf{u}| = \left|2\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+9+0} = \sqrt{18} \neq \sqrt{6}$.

B är sant, ty om θ är vinkeln mellan **u** och **v**, så har vi $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|} = \dfrac{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \dfrac{2-1+2}{6} = \dfrac{1}{2}$

d.v.s. $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

C är sant, ty om θ är vinkeln mellan vektorerna, så har vi $\cos\theta = \dfrac{\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{6}} = \dfrac{3-3+0}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{6}} = 0$, d.v.s.

$\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

Svar: B, C

2. **A är sant**, ty $x = 1 = 7 + 2t \Leftrightarrow 2t = -6 \Leftrightarrow t = -3$ och vi får $y = 2 - 3\cdot 0 = 2$ och $z = -3 - 3\cdot(-1) = 0$.
B är sant, ty om vi sätter in punkten *P*:s koordinater i planets ekvation får vi $VL = 3\cdot 1 - 2 + 5\cdot 0 = HL$.
C är sant, ty den givna linjen är samma linje som i påstående A (se Anm nedan) och planet detsamma som i B.
Anm: Låt $t = 1$ i ekvationen i C, så ser vi att punkten $(7,2,-3)$ även ligger på denna linje och dessutom har linjerna i A och C samma riktning.

Svar: A, B, C

3. a) Enligt projektionsformeln är den ortogonala projektionen av vektorn **v** på vektorn **u** lika med

$$\mathbf{v}_{\|\mathbf{u}} = \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}}{\left(\sqrt{6}\right)^2}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{2}{6}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

b) Välj t.ex. $\mathbf{v}_{\|\mathbf{u}} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, eller ta $t\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, där $t \in \mathbf{R}$ kan väljas godtyckligt.

c) Välj t.ex. $\mathbf{v}_{\perp\mathbf{u}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\|\mathbf{u}} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \dfrac{3}{3}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} - \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$, eller ta vilken vektor **w** som helst som

uppfyller $\mathbf{w}\cdot\mathbf{u} = 0$, t.ex. duger $\mathbf{w} = \begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix}$ eller $\mathbf{w} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Svar : a) $\mathbf{v}_{\|\mathbf{u}} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

b) T.ex. $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

c) T.ex. $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$

4. Om linjerna har någon gemensam skärningspunkt skall systemet $\begin{cases} 2+t=-9+3s \\ 1-t=6-s \\ -1+2t=-11+2s \end{cases}$ ha entydig lösning.

Systemet är $\Leftrightarrow \begin{cases} t-3s=-11 \\ -t+s=5 \\ 2t-2s=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} t=-2 \\ s=3 \end{cases}$, som ger oss (sätt $t=-2$ i den första linjens ekvation)

$x=2-2=0$, $y=1-(-2)=3$ och $z=-1+2\cdot(-2)=-5$

Kontroll visar att vi får samma resultat om vi sätter $s = 3$ i den andra linjens ekvation.

Svar: Ja, linjerna har den gemensamma punkten (0 , 3 , - 5).

5. Vi skriver systemet på matrisform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & -14 \\ 0 & -7 & 7 & -14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-t \\ y=2+t, t\in \mathbf{R} \\ z=t \end{cases}.$$

Vi kontrollerar genom att sätta in lösningen i resp. ekvation i det ursprungliga systemet.

Ekvation 1: VL = $(1-t)+2(2+t)-t=5$ = HL

Ekvation 2: VL = $3(1-t)-1(2+t)+4t=1$ = HL,

Ekvation 3: VL = $5(1-t)+3(2+t)+2t=11$ = HL.

Kontrollen visar alltså att vi funnit korrekt lösning.

Svar: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t\in \mathbf{R}$