TNA001
Kontrollskrivning 3 – Svar och lösningar
2011-09-19 Sixten Nilsson

---

1. **A är falskt**, ty låt t.ex. $a = b = e \Rightarrow$ VL $= \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{\ln e}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1$, medan HL $= 1 - 1 = 0$
   B är falskt, ty HL = 0 för alla $a > 0$ och $b > 0$, medan vi för t.ex. $a = b = e$ får
   VL $= \ln\frac{e^2}{2e} = \ln\frac{e}{2} = 1 - \ln 2 \neq 0$.
   C är sant, ty logaritmlagar ger
   $$\ln a^{-3} + \ln(a^3 b) = -3\ln a + \ln a^3 + \ln b = -3\ln a + 3\ln a + \ln b = \ln b$$
   Svar: C

2. **A är sant**, ty använd sambandet $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$ och låt där $t = 4v$.
   B är falskt, ty för $\pi \leq v \leq \dfrac{3\pi}{2}$ är $\cos v \leq 0$, så vi har VL ≤ 0 medan HL ≥ 0, med likhet i båda fallen om och endast om $v = \dfrac{3\pi}{2}$.
   C är sant, ty trigonometriska ettan ger $\sin v = \pm\sqrt{1 - \cos^2 v}$, men $\sin v \geq 0$ om $\dfrac{\pi}{2} \leq v \leq \pi$ och alltså gäller det att $\sin v = +\sqrt{1 - \cos^2 v} = \sqrt{1 - \cos^2 v}$ för givna värden på v.
   D är falskt, ty för t.ex. $v = \frac{\pi}{2}$ har vi VL $= \sin^2 \pi = 0$ medan HL $= \frac{1}{2} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$
   E är sant, ty använd sambandet $\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}$ och låt där $t = 3v$.
   Svar: A, C och E

3. $e^{2x} - 2e^x = 8 \Leftrightarrow$ [Sätt $t = e^x > 0$] $\Leftrightarrow t^2 - 2t - 8 = 0, t > 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow t = 4$
   (**Anm**: andragradsekvationens andra rot $t = -2 \leq 0$, och är därför inte relevant.)
   $t = 4 \Leftrightarrow e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4 = 2\ln 2$
   Svar: $x = 2\ln 2$

4. Trigonometriska funktionsvärden för standardvinklar ger oss följande tabell:

v	$\cos v$	$\sin v$	$\tan v$
$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

5. Vi söker alla reella x som uppfyller villkoret $\ln(x^2 - 3) \leq \ln(2x)$. På grund av logaritmfunktionens definitionsområde och att $\ln x$ är strängt växande, så måste tre olikheter vara *uppfyllda samtidigt*, nämligen

I. $x^2 - 3 > 0$, II. $2x > 0$ och III. $x^2 - 3 \leq 2x$.

Vi söker alltså *snittmängden* till dessa tre olikheter. Vi studerar först varje olikhet för sig och får

I. $x^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) > 0 \Leftrightarrow$ [gör teckenstudium i en tabell] $\Leftrightarrow x \in]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, \infty[$.

II. $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

III. $x^2 - 3 \leq 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow$ [faktorisera genom att bestämma nollställen till VL] $\Leftrightarrow$
$(x + 1)(x - 3) \leq 0 \Leftrightarrow$ [gör teckenstudium i en tabell] $\Leftrightarrow x \in [-1,3]$

Alltså gäller olikheten för alla $x \in \left(]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, \infty[\right) \cap]0, \infty[\cap [-1,3] =$ [illustrera i igur] $=]\sqrt{3}, 3]$

Svar: Alla $x \in]\sqrt{3}, 3]$