

## TNA001

### Kontrollskrivning 3 – Svar med kommentarer/Lösningar

2009-09-21 Sixten Nilsson

1. **A är falskt**, ty låt t.ex.  $x = e$  och  $y = 1$  så får vi  $VL = 1$  och  $HL = 0$ .  
**B är sant**, ty det motsvarar precis en av logaritmlagarna.  
**C är sant**, ty vi kan skriva  $VL = x \ln a + y \ln a = (x + y) \ln a = \ln a^{x+y} = HL$ .  
**D är falskt**, ty vi har inte samma bas i täljare och nämnare.  
**E är sant**, ty  $VL = (a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x = HL$ .
2. **A är falskt**, ty  $VL = 1$  för alla val av  $v$  (trigonometriska ettan) medan  $HL$  t.ex. är  $\neq 1$  för  $v = \frac{\pi}{2}$ .  
**B är falskt**, ty låt t.ex.  $v = 0$  så får vi  $VL = \sin^2 0 = 0^2 = 0 \neq \frac{1}{2} = \frac{1-0}{2} = \frac{1-\sin(2 \cdot 0)}{2} = HL$ .  
**C är falskt**, ty prova t.ex. med att sätta  $v = 0$ .  
**D är sant**, ty det motsvarar precis additionssatsen för cosinus.  
**E är sant**. Rita t.ex. en relevant figur (enhetscirkeln) så inses detta.  
**F är sant**, ty vi har  $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$  för alla  $t \in \mathbf{R}$ .
3. **A är sant**. Rita t.ex. en relevant figur (enhetscirkeln).  
**B är sant**. Rita t.ex. en relevant figur (enhetscirkeln).  
**C är falskt**, ty  $0 < \cos v \leq 1$  för alla  $v \in \left] \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right[$ . Vi har alltså  $\cos v \neq -\frac{\sqrt{11}}{6}$ .  
**D är sant**, ty ekvationen  $\cos v = \frac{1}{2}$  har precis de lösningar som anges här.  
**E är sant**, ty vi har  $\tan \frac{\pi}{3} = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$  och  $\cot \frac{\pi}{6} = \frac{\cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ .
4. Ekvationens termer är definierade om  $15 - 2x > 0$  och  $x > 0$ , d.v.s. för  $x \in \left] 0, \frac{15}{2} \right[ = D_{ekv}$ .  
För  $x \in D_{ekv}$  har vi  
 $\ln(15 - 2x) = 2 \ln x, x \in D_{ekv} \Leftrightarrow \ln(15 - 2x) = \ln x^2, x \in D_{ekv} \Leftrightarrow$  (ty  $\ln$ -funktionen är omvändbar)  $\Leftrightarrow$   
 $15 - 2x = x^2, x \in D_{ekv} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 3$   
(Observera att andragradsekvationens andra rot,  $x = -5$ , inte är lösning till den givna ekvationen, ty  $x = -5 \notin D_{ekv}$ .)  
**Svar:  $x = 3$ .**
5. Vi har  $e^{2x} - e^x \leq 12 \Leftrightarrow e^{2x} - e^x - 12 \leq 0 \Leftrightarrow$  [sätt  $t = e^x > 0$ ]  $\Leftrightarrow t^2 - t - 12 \leq 0, t > 0 \Leftrightarrow (t+3)(t-4) \leq 0, t > 0$ .  
Vi teckenstuderar (TECKENSHEMA!) vänstra ledet i den sista olikheten och får, för  $t > 0$ , att  $VL \leq 0$  för  $0 < t \leq 4 \Leftrightarrow 0 < e^x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq \ln 4 = 2 \ln 2$ , ty den vänstra olikheten,  $0 < e^x$ , gäller för alla  $x$ , och den högra,  $e^x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq \ln 4$ , vilket innebär att *både* vänster *och* höger olikhet gäller för  $x \leq \ln 4$ .  
**Svar:  $x \leq 2 \ln 2$**