TNA001
Kontrollskrivning 2 – Svar och lösningar
2011-09-05 Sixten Nilsson

Varje uppgift bedöms med 0 eller 1 poäng.
Uppgifterna 1-4 måste besvaras som nedan för att ge poäng.

Svar:

1. B och D
2. a) Re $\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2}$ b) $|z + i^2\bar{z}|^2 = 4y^2$
3. På randen och inuti kvartscirkel i 4:e kvadranten. Kvartscirkeln har $r = 1$ och mp i origo.
4. $f^{-1}(y) = \frac{2-y}{3}$, $D_{f^{-1}} = [-10{,}5]$
5. **Lösning: Se nedan**

Lösningsidéer.

1. Rita grafer till resp. funktion. Om varje linje $y = C$ skär funktionsgrafen precis en gång, där C är en konstant sådan att $C \in$ funktionens värdemängd, så har funktionen invers.

2. a) Re $\frac{1}{z}$ = Re $\frac{1}{x+iy}$ = Re $\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}$ = Re $\frac{x-iy}{x^2+y^2}$ = $\frac{x}{x^2+y^2}$

   b) $|z + i^2\bar{z}|^2 = |x + iy - (x - iy)|^2 = |2iy|^2 = 4y^2$

3. Första villkoret innebär alla z på randen och innanför cirkel med medelpunkt i origo och radien 1.
   Andra villkoret innebär alla z på imaginäraxeln och till höger denna.
   Tredje villkoret innebär alla z på realaxeln och nedanför denna.
   Sammantaget har vi alltså alla z på randen och inuti kvartscirkel i 4:e kvadranten. Kvartscirkeln har radien = 1 och medelpunkt i origo.

4. Vi har $f(x) = 2-3x$, som är strängt avtagande på $D_f = [-1{,}4]$ och har därmed invers. Det innebär att $V_f = [f(4), f(-1)] = [-10{,}5]$. Vi får inversen genom att lösa ut x ur
   $y = 2-3x\,, -1 \le x \le 4 \Leftrightarrow x = \frac{2-y}{3}$, $y \in [-10{,}5]$, d.v.s. vi har $f^{-1}(y) = \frac{2-y}{3}$ med $D_{f^{-1}} = [-10{,}5]$.

5. Vi inför beteckningarna $V(n)$ och $H(n)$ för respektive vänster- och högerled i det givna påståendet $P(n)$, d.v.s. $V(n) = \sum_{k=1}^{n}\left(2\cdot 3^k\right)$ och $H(n) = 3^{n+1}-3$.

   STEG 1: $P(1) : V(1) = \sum_{k=1}^{1}\left(2\cdot 3^k\right) = 2\cdot 3^1 = 6$ medan $H(1) = 3^{1+1}-3 = 9-3 = 6$.

   Alltså är $V(1) = H(1)$ och $P(1)$ är därmed sant.

   STEG 2: Vi antar att $P(p)$ är sant för något godtyckligt $p \in \mathbf{Z}^+$, d.v.s. vi antar att

   $$V(p) = \sum_{k=1}^{p}\left(2\cdot 3^k\right) = H(p) = 3^{p+1}-3.$$

   Detta medför att

   $$V(p+1) = \sum_{k=1}^{p+1}\left(2\cdot 3^k\right) = \sum_{k=1}^{p}\left(2\cdot 3^k\right) + 2\cdot 3^{(p+1)} = [\text{Enligt antagandet}] = 3^{p+1}-3+2\cdot 3^{(p+1)} =$$

   $$= 3^{p+1}(1+2)-3 = 3\cdot 3^{p+1}-3 = 3^{(p+1)+1}-3 = H(p+1)$$

   d.v.s. vi har visat att $P(p)$ sant $\Rightarrow P(p+1)$ sant.

STEG 3: Eftersom $P(1)$ är sant måste enligt STEG 2 även $P(2)$ vara sant, men det innebär även att $P(3)$ är sant o. s. v. och vi kan dra slutsatsen: $\sum_{k=1}^{n}\left(2 \cdot 3^k\right) = 3^{p+1} - 3$ gäller för alla $n \in \mathbf{Z}^+$,

v.s.v.