TNA001
Kontrollskrivning 2 – Svar med kommentarer/Lösningsskisser.
2010-09-06 Sixten Nilsson

1. Vi har att uttrycket är definierat $\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow$ /Gör TECKENSCHEMA! / $\Leftrightarrow x \in \left]-\infty, 1\right[\cup \left[2, \infty\right[$

   Svar: $x \in \left]-\infty, 1\right[\cup \left[2, \infty\right[$

2. A är **sant**, ty med $z = x + iy$ har vi HL = $(x+iy)\cdot(x-iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2 =$ VL.

   B är **sant**, ty med $z = x + iy$ har vi $\mathrm{Im}(\bar{z} + z) = \mathrm{Im}(x - iy + x + iy) = \mathrm{Im}(2x) = 0$, ty x är reellt.

   C är **falskt**, ty med $z = x + iy$ har vi HL = $\dfrac{z - \bar{z}}{2} = \dfrac{x + iy - x + iy}{2} = \dfrac{2iy}{2} = iy = i \cdot \mathrm{Im}\, z \neq$ VL.

   D är **sant**, ty med $z = x + iy$ har vi $z^2 + (\bar{z})^2 = (x+iy)^2 + (x-iy)^2 = x^2 + 2xiy + i^2y^2 + x^2 - 2xiy + i^2y^2 =$
   $= x^2 - y^2 + x^2 - y^2 = 2x^2 - 2y^2$, som är reellt ty $x \in \mathbf{R}$ och $y \in \mathbf{R}$.

3. Med $z = x + iy$ har vi

$$|z + iz| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |x + iy + i(x+iy)| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |x - y + i(x+y)| = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{(x-y)^2 + (x+y)^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(x-y)^2 + (x+y)^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 2xy + y^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{\underbrace{2(x^2+y^2)}_{\geq 0 \text{ för alla } x,y}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$
$$2(x^2+y^2) = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

   Svar: $x^2 + y^2 = 1$
   (vilket i det komplexa talplanet motsvarar alla z som ligger på randen till enhetscirkeln.)

4. **A saknar invers,** ty för t.ex. både $x = 1$ och $x = -1$ får vi $y = \sqrt{5}$.
   B har invers, ty funktionen är strängt växande på hela sin definitionsmängd.
   C har invers, ty funktionen är strängt växande på hela sin definitionsmängd.
   D saknar invers, ty $|x - 4| = \begin{cases} x - 4 & \text{om } x \geq 4 \\ 4 - x & \text{om } x \leq 4 \end{cases}$ så för t.ex. $x = 5$ och $x = 3$ får vi samma värde på y, nämligen $y = 1 \in V_{f_4}$.

   E saknar invers, ty $|x-4| + x = \begin{cases} x - 4 + x = 2x - 4 & \text{om } x \geq 4 \\ 4 - x + x = 4 & \text{om } x \leq 4 \end{cases}$ så för $x \leq 4$ är funktionen konstant och är därmed inte omvändbar för dessa x.

   F har invers, ty $|x-4| + 2x = \begin{cases} x - 4 + 2x = 3x - 4 & \text{om } x \geq 4 \\ 4 - x + 2x = x + 4 & \text{om } x \leq 4 \end{cases}$. Då är funktionen strängt växande på hela sin definitionsmängd (och har därmed invers).

   Svar: Funktionerna i B, C och F har invers.

   Anm: Om vi ritar funktionsgraferna blir det enkelt att avgöra om funktionerna är omvändbara eller inte.

5. Vi inför beteckningarna $V(n)$ och $H(n)$ för respektive vänster- och högerled i påståendet

P(n): $V(n) = \sum_{k=1}^{n}(3k-1) = \frac{3n^2+n}{2} = H(n)$.

STEG 1: $P(1)$: $V(1) = \sum_{k=1}^{1}(3k-1) = 3\cdot 1 - 1 = 2$ medan $H(1) = \frac{3\cdot 1^2+1}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$

Alltså är $V(1) = H(1)$, d.v.s. $P(1)$ är sant.

STEG 2: Vi antar att $P(p)$ är sant för godtyckligt $p \in \mathbf{Z}^+$. d. v. s. vi antar att

$$V(p) = \sum_{k=1}^{p}(3k-1) = H(p) = \frac{3p^2+p}{2}$$

Detta medför att

$$V(p+1) = \sum_{k=1}^{p+1}(3k-1) = \sum_{k=1}^{p}(3k-1) + (3(p+1)-1) = \sum_{k=1}^{p}(3k-1) + 3p + 2 =$$

$$= \text{/enligt antagandet/} = \frac{3p^2+p}{2} + 3p + 2 = \frac{3p^2+p+6p+4}{2} = \frac{3p^2+7p+4}{2}$$

och

$$H(p+1) = \frac{3(p+1)^2+(p+1)}{2} = \frac{3(p^2+2p+1)+p+1}{2} = \frac{3p^2+7p+4}{2}$$

därav följer att även $P(p+1)$ är sant, d.v.s. vi har visat att $P(p)$ sant $\Rightarrow P(p+1)$ sant.

STEG 3: Eftersom $P(1)$ är sant måste enligt STEG 2 även $P(2)$ vara sant, men det innebär även att $P(3)$ är sant o. s. v. och vi kan, enligt induktionsprincipen, dra den önskade slutsatsen att

$\sum_{k=1}^{n}(3k-1) = \frac{3n^2+n}{2}$ för alla $n \in \mathbf{Z}^+$.