

## FÖ 5: Induktionsbevis

- Induktionsbevis illustreras via **Exempel 26** nedan
- Bevis av summaformeln för aritmetisk summa med hjälp av ett induktionsbevis (**Exempel 27**)
- Exempel på en olikhet som bevisas med induktion:  $(x+1)^n \geq 1+nx$ ,  $n \in \mathbf{Z}^+$ ,  $x \geq 0$  (**Exempel 28**)

Det förekommer då och då att man härleder satser med hjälp av s.k. *induktion*. I princip går man till väga så här:

Man har en följd påståenden  $P(n_0)$ ,  $P(n_0 + 1)$ , ... och man vill visa att  $P(n)$  är sant för alla *heltal*  $n \geq n_0$ .

Beviset sker i **tre** STEG.

STEG 1: Man visar att  $P(n_0)$  är sant.

STEG 2: Man visar att för varje  $p \geq n_0$  gäller det att om  $P(p)$  är sant, så är även  $P(p+1)$  sant.

STEG 3: Man drar den önskade slutsatsen nämligen att  $P(n)$  är sant för alla heltal  $n \geq n_0$ .

Vi ska illustrera tekniken med hjälp av några exempel. Vi använder beteckningen " $=$ " e.d. då vi tar det s.k. "induktionssteget", som är den viktigaste delen av STEG 2.

### Exempel 26

Bevisa att för alla  $n \in \mathbf{Z}^+$  gäller  $P(n)$ :  $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$

#### Lösning :

Vi inför beteckningarna  $V(n)$  och  $H(n)$  för respektive vänster- och högerled i påståendet

$P(n)$  ovan. d.v.s.  $V(n) = \sum_{k=1}^n (2k-1)$  och  $H(n) = n^2$ .

STEG 1:  $P(1)$ :  $V(1) = \sum_{k=1}^1 (2k-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$  medan  $H(1) = 1^2 = 1$

Alltså är  $V(1) = H(1)$  och  $P(1)$  är sant.

STEG 2: Vi antar att  $P(p)$  är sant för något  $p \in \mathbf{Z}^+$ . d. v. s.

$$V(p) = \sum_{k=1}^p (2k-1) = H(p) = p^2$$

Detta medför att

$$V(p+1) = \sum_{k=1}^{p+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^p (2k-1) + 2(p+1) - 1 = \sum_{k=1}^p (2k-1) + 2p + 1 =$$

$$p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2 = H(p+1)$$

och därav följer att även  $P(p+1)$  är sant, d.v.s. vi har visat att  $P(p)$  sant  $\Rightarrow P(p+1)$  sant.

STEG 3: Eftersom  $P(1)$  är sant måste enligt STEG 2 även  $P(2)$  vara sant, men det innebär även att

$P(3)$  är sant o. s. v. och vi kan dra den önskade slutsatsen:  $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$  gäller för alla

$n \in \mathbf{Z}^+$ .

### Exempel 27

Bevis av summaformeln för aritmetisk summa med hjälp av ett induktionsbevis.

**Bevis:**

Vi ska bevisa att  $P(n): V(n) = \sum_{i=1}^n (a + (i-1)d) = n \frac{2a + (n-1)d}{2} = H(n)$  gäller för alla  $n \in \mathbf{Z}^+$

**STEG 1:**  $P(1): V(1) = \sum_{i=1}^1 (a + (i-1)d) = a \quad H(1) = \frac{2a}{2} = a$

Alltså  $V(1) = H(1)$  d. v. s.  $P(1)$  gäller.

**STEG 2:** Vi antar att  $P(k)$  gäller för godtyckligt fixt tal  $k \in \mathbf{Z}^+$  d.v.s.

$$V(k) = \sum_{i=1}^k (a + (i-1)d) = k \frac{2a + (k-1)d}{2} = H(k)$$

Detta medför att

$$\begin{aligned} V(k+1) &= \sum_{i=1}^{k+1} (a + (i-1)d) = \sum_{i=1}^k (a + (i-1)d) + (a + kd) = \\ &= k \frac{2a + (k-1)d}{2} + a + kd = \frac{2ak + k(k-1)d + 2a + 2kd}{2} = \\ &= \frac{2a(k+1) + (k^2 + k)d}{2} = \frac{2a(k+1) + (k+1)kd}{2} = (k+1) \frac{2a + kd}{2} \end{aligned}$$

Dessutom har vi

$$H(k+1) = (k+1) \frac{2a + (k+1-1)d}{2} = (k+1) \frac{2a + kd}{2}$$

d.v.s.  $V(k) = H(k) \Rightarrow V(k+1) = H(k+1)$

**STEG 3** Enligt steg 1 gäller påståendet för  $n = 1$ . Då gäller det enligt steg 2 även för  $n = 1 + 1 = 2$ . Men då gäller det även för  $n = 2 + 1 = 3$  o.s.v. Via matematisk induktion har vi alltså att påståendet gäller för alla  $n \in \mathbf{Z}^+$ , v.s.v.

### Exempel 28

Vi skall visa via induktion att sambandet  $(1+x)^n \geq 1+nx$  gäller för alla  $n \in \mathbf{Z}^+$  och  $x \geq -1$ .

#### Bevis:

I. För  $n = 1$  får vi VL =  $(1+x)^1 = 1+x =$  HL

Alltså har vi VL  $\geq$  HL för  $n = 1$ .

II. Antag att sambandet gäller för  $n = p \geq 1$ , d.v.s.  $(1+x)^p \geq 1+px$

Studera nu fallet  $n = p+1$ .

Vi får då:  $(1+x)^{p+1} = (1+x)^p \cdot (1+x)$

$$\geq (1+px)(1+x) \quad (\text{enligt antagandet och eftersom } x \geq -1)$$

$$= 1+x+px+px^2$$

$$= 1+(p+1)x+px^2$$

Men  $1+(p+1)x+px^2 \geq 1+(p+1)x$  eftersom  $p$  är ett positivt heltal och  $x^2 \geq 0$ .

Således gäller  $(1+x)^{p+1} \geq 1+(p+1)x$  d.v.s. sambandet gäller för  $n = p+1$  om det gäller för  $n = p$ .

III. Vi har visat att påståendet gäller för  $n = 1$ . Enl. II gäller påståendet då för  $n = 1+1 = 2$ , och då gäller det för  $n = 2+1 = 3$  o.s.v.

Via matematisk induktion gäller således om  $x \geq -1$  att  $(1+x)^n \geq 1+nx$  för alla  $n \in \mathbf{Z}^+$ , V.S.V.

## Övningar – Induktion, binomialsatsen

512 Bevisa med hjälp av induktion att följande formler gäller för alla  $n \in \mathbf{Z}^+$  :

$$\text{a) } \sum_{k=1}^n (3k-2) = \frac{n(3n-1)}{2} \quad \text{b) } \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}$$

513S Bestäm  $t$  så att formeln  $\sum_{k=1}^n (3k^2 - k) = n^2(n+t)$  gäller för  $n = 1$ . Visa sedan att formeln gäller med detta  $t$ -värde för alla  $n = 1, 2, 3, \dots$

514S Visa med induktionsbevis att  $7^n - 2^n$  är delbart med 5 för alla  $n = 1, 2, 3, \dots$

515S. Visa att  $3^n \geq n^3$  för alla  $n \geq 3$ .

516. Visa att  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  för alla  $n = 1, 2, 3, \dots$

517S. Visa att  $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$

518 Skriv som en summa

a)  $(x + 2y)^4$

b)  $(x - 4y)^4$

519 Beräkna följande binomialkoefficienter

a)  $\binom{7}{3}$

b)  $\binom{15}{12}$

520 Vilken av följande båda binomialkoefficienter är störst?

a)  $\binom{10}{3}$  eller  $\binom{16}{2}$

b)  $\binom{81}{2}$  eller  $\binom{30}{27}$

521S Bestäm  $n$  så att  $\binom{n}{3} = \binom{n}{7}$

522 Beräkna koefficienten för

a)  $x^4$  i uttrycket  $(2x - 1)^{15}$

b)  $x^3$  i uttrycket  $(1 - 3x)^{11}$

523S Beräkna den term som är oberoende av  $x$  i utvecklingen

a)  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$

b)  $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^3$

c)  $\left(2x^2 - \frac{1}{4x^3}\right)^{10}$

## FACIT

513  $t = 1$

518 a)  $x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 32xy^3 + 16y^4$

b)  $x^4 - 16x^3y + 96x^2y^2 - 256xy^3 + 256y^4$

519 a) 35

b) 455

520 a) båda är 120

b) 3240 respektive 4060

521 endast  $n = 10$  (Ekvationen har rötterna 10, -1 och två komplexa rötter)

522 a) - 21840

b) - 4455

523 a) 20

b) 3

c)  $105/2$