

FÖ 15: Kap 2.6 i FN

2.6 Komplexa exponentialfunktioner

a) Definition av e^{ix} samt räkneregler.

b) Eulers formler

Exempel 39: Visa att $\cos^2 x \cdot \sin^2 x = \frac{1}{8} - \frac{\cos 4x}{8}$

c) Komplexa tal i **polär form**

- Fig. 2.47 motiverar att vi kan skriva ett komplext tal som

$$z = r(\cos v + i \sin v) = re^{iv},$$

där $r = |z|$ och $v = \arg z$

- Testövning 2.60, 2.61

d) Multiplikation och division av komplexa tal i polär form.

e) de Moivres formel: $z^p = r^p e^{ipv}$, där z är ett komplex tal och $p \in \mathbf{Z}$.

Exempel 40: Beräkna $(\sqrt{3} + 3i)^6$

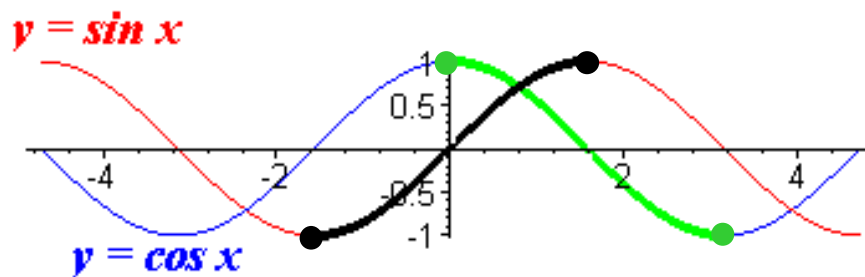
FÖ 16: Kap 2.5 i FN

Viktiga förkunskaper:

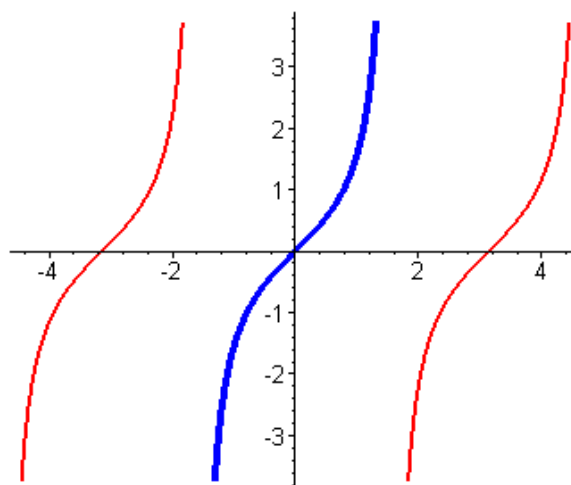
- Funktioner: Definitionsmängd, värdemängd, omvärdbar funktion, strängt växande (avtagande)
- Inverser: Definition, egenskaper
- Trigonometri: Funktionerna $\sin x$, $\cos x$ och $\tan x$ och deras definitions- och värdemängder och grafer

Kap 2.5. Arcusfunktionerna – Inverser till de trigonometriska funktionerna

Definition av de omvärdbara restriktionerna till funktionerna $\sin x$, $\tan x$ och $\cos x$ och deras grafer.



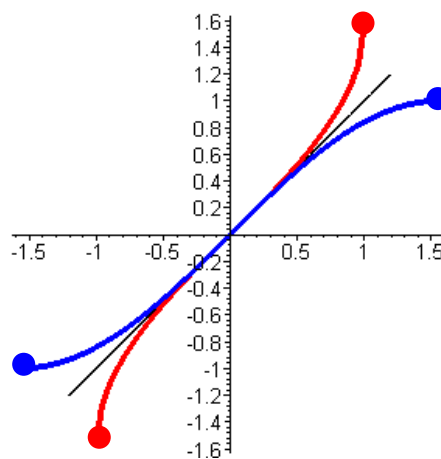
$$y = \tan x$$



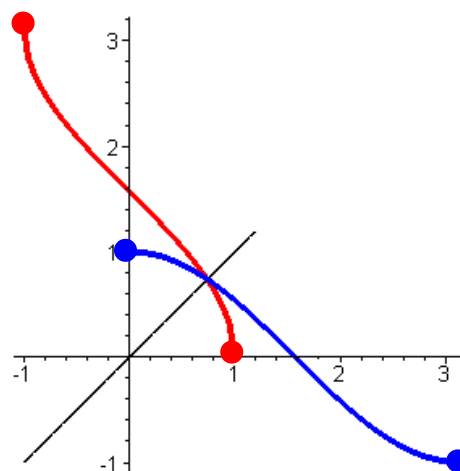
Definition av inversen till dessa restriktioner: $\arcsin x$, $\arctan x$, $\arccos x$.

Grafer till dessa studeras.

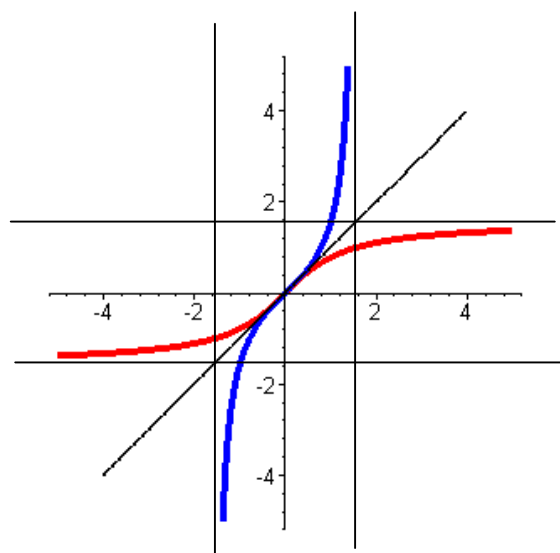
Graferna $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
 $y = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$



Graferna $y = \cos x$, $x \in [0, \pi]$
 $y = \arccos x$, $x \in [-1, 1]$



Graferna $y = \tan x$, $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
 $y = \arctan x$, $x \in]-\infty, \infty[$



Exempel 41 (jämför även Ex 2.26 i F-N)

x	$\arcsin x$
0	
1	
$-1/\sqrt{2}$	
-2	
$\sin(-\pi/6)$	
$\sin(5\pi/6)$	

x	$\arccos x$
-1	
0	
-1/2	
$1/\sqrt{2}$	
1.2	
$\cos(5\pi/6)$	
$\cos(-\pi/6)$	
$\cos(-5\pi/6)$	

x	$\arctan x$
1	
-1	
0	
$1/\sqrt{3}$	
$\sqrt{3}$	



arcsin och arctan är udda funktioner, d.v.s.

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x \quad (2.64)$$

och

$$\arctan(-x) = -\arctan x \quad (2.65)$$

där x måste tillhöra resp. funktions definitionsområde.

Bevis:

Det gäller att

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \text{för } -1 \leq x \leq 1 \quad (2.66)$$

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad x > 0 \quad (2.67)$$

Bevis:

(2.66)

Med $v = \arccos x$ har vi $x = \cos v = \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$ och där $v \in [0, \pi]$. Då är VL i (2.66) lika med

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)\right) + v = \left(\frac{\pi}{2} - v\right) + v = \frac{\pi}{2}, \text{ v.s.v.}$$

(2.67)

Om vi sätter $\theta = \arctan x$, $x > 0$, har vi $x = \tan \theta$, där $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Vi har då

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}\cos\theta - \cos\frac{\pi}{2}\sin\theta}{\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{2}\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{x} \quad \text{med } 0 < \frac{\pi}{2} - \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Alltså gäller $\arctan \frac{1}{x} = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \arctan x$, d.v.s.

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \text{ v.s.v.}$$

Ekvationer som innehåller arcusfunktioner.

Exempel 42. Lös ekvationerna

a) $\arccos x = \frac{\pi}{6}$

b) $\arctan x = -\frac{\pi}{6}$

c) $\arccos x = \arcsin 2x$

