Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-363320

Tentamen i linjär algebra TNIU 75

2004-08-24 kl. 08.00—13.00

Jour: Sasan Gooran, tfn 011-363277
Lösningarna finns på **www.itn.liu.se/∼krzma** from 2004-08-24 kl. 14.00.
Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift bedöms med 0-3p. För godkänt (3) krävs minst 8p samt minst 2 uppgifter bedömda 2p eller högre. För väl godkänd (4) respektive mycket väl godkänd (5) krävs 12 respektive 15 poäng. Inom parentes anges hur många poäng varje deluppgift är värd. Uppgifterna är *inte* sorterade efter svårighetsgrad.

1. a) Ange när ett homogent system av n linjära ekvationer med n obekanta har icke-triviala lösningar. (1p)

   b) Bestäm konstanten b så att systemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + bx_2 + 3x_3 = 0 \\ 2bx_1 - 3x_2 + bx_3 = 0 \end{cases}$$

   har icke-triviala lösningar. (1p) Bestäm också dessa lösninghar. (1p)

2. a) Definiera vad det betyder att en kvadratisk matris A är ortogonal. (1p)

   b) Bestäm för vilka konstanter a, b blir matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b/\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2/3} \\ \sqrt{2/3} & 0 & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

   ortogonal. (1p)

   c) Invertera A för dessa värden av parametrarna a, b. (1p).

3. Ett plan π går genom punkterna $P = (1, -1, 0)$, $Q = (2, 1, 3)$ och $R = (3, -3, 3)$. Bestäm planets ekvation i normalform. (1.5p) Bestäm avståndet mellan planet π och punkten $S = (-2, 0, 5)$. (1.5p) Koordinatsystemet antas vara ortonormal.

4. Låt avbildningen F vara den ortogonala projektionen av rummet $\mathbf{R}^3$ på en rät linje l genom origo som är parallell med en bestämd vektor $\overrightarrow{u}$. Visa att F är linjär genom att utgå från definitionen av linjär avbildning. (2p) Ange avbildningens samtliga egenvärden med motsvarande egenvektorer. (1p)

5. Beräkna A^{100} om $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. (3p)

6. Visa att en linjär avbildning som i en ON-bas $e = (e_1, e_2, e_3)$ ges av matrisen

$$R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

   är en rotation. (1p) Bestäm också rotationens axel (1p) och vinkeln. (1p)

7. Låt U vara ett vektorrum av samtliga linjära kombinationer av $\sin x$ och $\cos x$: $U = [\sin x, \cos x]$, där $[\ldots]$ betecknar linjära höljet av .... Betrakta också en linjär avbildning $P : U \to U$ som ges av

$$P(f)(x) = f(x + \varphi) \text{ för varje } f \in U,$$

   (dvs. argumentförskjutning) där φ är en godtycklig reell konstant. Ange avbildningens matris i basen $(\sin x, \cos x)$. (1p) Visa att P är inverterbar (1p) och bestäm matrisen för P^{-1} i denna bas. (1p).