Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningsförslag för tentamen i linjär algebra TNIU75

2004-08-24 kl. 08.00—13.00

1. a) Systemet

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

har icke-triviala lösningar om och endast om systemets matris

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

är singulär d.v.s. om och endast om $\det(A) = 0$.

b) Systemets matris är

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 3 \\ 2b & -3 & b \end{pmatrix}.$$

Enkellt beräkning leder till att $\det(A) = -b^2 + 5b + 6$ som är noll enbart om $b = -1$ eller om $b = 6$. Ifall $b = -1$ antar systemet formen

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{cases}$$

och har 1-parameterslösningen $(x_1, x_2, x_3) = t(-2, 1, 1)$. I fallet när $b = 6$ antar systemet formen

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 12x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \end{cases}$$

som också har en 1-parameterslösning, den här gången på formen $(x_1, x_2, x_3) = t(3, 2, -5)$.

2. a) En kvadratisk matris A är ortogonal om $A^{-1} = A^t$ d.v.s. om $AA^t = E$.

b) Enkel beräkning leder till att

$$AA^t = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}c^2 + \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\sqrt{2}\,(c-1) \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{2}\,(c-1) & 1 \end{pmatrix}$$

så att $AA^t = E$ om och endast om $c = 1$ och $a = \pm 1$.

c) Om $c = 1$ och $a = \pm 1$ har vi att

$$A^{-1} = A^t = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

3. a) Planets normal $\overrightarrow{n}$ får vi t.ex. genom att beräkna vektorprodukten av $\overrightarrow{PQ} = (1, 2, 3)$ och $\overrightarrow{PR} = (2, -2, 3)$,

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (12, 3, -6).$$

Således, planets ekvation blir: $12x + 3y - 6z + D = 0$ där konstanten D kan bestämmas genom att sätta in t.ex. punkten P i π:s ekvation: $12 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) - 6 \cdot 0 + D = 0$ vilket ger $D = -9$. Ekvationen blir alltså $12x + 3y - 6z - 9 = 0$ eller, efter att vi har delat den med 3,

$$4x + y - 2z - 3 = 0.$$

b) Avståndet mellan π och S kan fås ur en formel på sid. 141 i boken:

$$d = \left| \frac{4 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 - 2 \cdot 5 - 3}{\sqrt{4^2 + 1^2 + (-2)^2}} \right| = \frac{21}{\sqrt{21}} = \sqrt{21}.$$

Om vi minns ej den färdiga formeln kan vi gå tillväga på följande sätt: vi drar (i våra huvuden, förstås) en linje l genom S och ortogonal mot planet π. Linjens riktningsvektor är parallell med normalen $\overrightarrow{n}$ och l kan alltså skrivas som

$$l = (-2, 0, 5) + t(4, 1, -2) = (-2 + 4t, t, 5 - 2t).$$

Linjen l skär π när parametern t är sådant att den löpande punkten på linjen uppfyller även planets ekvation, dvs om t är sådant att

$$4(-2 + 4t) + t - 2(5 - 2t) - 3 = 0$$

vilket ger $t = 1$. Skärningspunkten T mellan linjen l och planet π är alltså $T = (-2 + 4 \cdot 1, 1, 5 - 2 \cdot 1) = (2, 1, 3)$. Avståndet d mellan π och l blir då lika med längden av vektorn $\overrightarrow{ST} = (2 - (-2), 1 - 0, 3 - 5) = (4, 1, -2)$:

$$d = |(4, 1, -2)| = \sqrt{4^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}.$$

4. a) Som bekant, $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ är linjär om för varje par $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ av vektorer i rummet och varje par α,β av konstanter gäller att

$$F(\alpha \overrightarrow{v} + \beta \overrightarrow{w}) = \alpha F(\overrightarrow{v}) + \beta F(\overrightarrow{w}). \tag{1}$$

I vårt fall har vi att för en godtycklig vektor $\overrightarrow{f}$ i rummet gäller att

$$F\left(\overrightarrow{f}\right) = \frac{\overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{u}}{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}} \overrightarrow{u}$$

(projektionsformeln, ty F verkar så att den projicerar vektorerna på linjens riktningsvektorn $\overrightarrow{u}$) så att

$$F(\alpha\overrightarrow{v}+\beta\overrightarrow{w}) = \frac{(\alpha\overrightarrow{v}+\beta\overrightarrow{w})\cdot\overrightarrow{u}}{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}}\overrightarrow{u} = \alpha\frac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}}{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}}\overrightarrow{u} + \beta\frac{\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}}{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}}\overrightarrow{u} = \alpha F(\overrightarrow{v}) + \beta F(\overrightarrow{w}),$$

vilket visar att kravet (1)är uppfylld.

b) Vi har naturligtvis att $F(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ så att samtliga vektorer som är parallella med l:s riktningsvektorn $\overrightarrow{u}$ är egenvektorer med samma egenvärde 1. Vidare, alla vektorer ortogonala mot $\overrightarrow{u}$ projiceras på nollvektorn och således utgör egenvektorer med samma (för alla) egenvärde 0.

5. Matrisen A kan alltid tolkas som en matris för en linjär avbildning av rummet $\mathbf{R}^2$, given i en standard ON-bas $e = (e_1, e_2)$. Matrisen är symmetrisk så att det finns en ON-bas av egenvektorer till A. Vi börjar alltså med att hitta den. Genom att lösa den karakteristiska ekvationen $\det(A - \lambda E) = 0$ får vi två stycken egenvärden: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$, med motsvarande egenvektorer $v_1 = (-2, 1)$ respektive $v_2 = (1, 2)$. De är - i överenskommelse med en viktig sats om symmetriska avbildningar - ortogonala. Genom att normera dem får vi en ON-bas av egenvektorer:

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}, \quad f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}. \tag{2}$$

I den nya basen $f = (f_1, f_2)$ avbildningen har matrisen

$$A_f = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 5\end{pmatrix}$$

(diagonal med egenvärden på diagonalen). Å andra sidan, vi vet från en sats att $A_f = T^{-1}AT$, där T är basbytematrisen från basen e till basen f, som avläses direkt ur (2).

$$T = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}.$$

Genom att multiplicera sambandet $A_f = T^{-1}AT$ med T från vänster och med T^{-1} från höger får vi att $A = TA_fT^{-1}$. Ur detta föjler att

$$A^{100} = \left(TA_fT^{-1}\right)^{100} = \left(TA_fT^{-1}\right)\left(TA_fT^{-1}\right)\ldots\left(TA_fT^{-1}\right) = TA_f^{100}T^{-1}.$$

Vidare, $T^{-1} = T^t = T$ ty T är både ortogonal och symmetrisk. Vi får alltså

$$A^{100} = T\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 5^{100}\end{pmatrix}T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 5^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix} = \ldots = 5^{99}A.$$

6. Matrisen R är ortogonal, ty $RR^t = E$ och desutom $\det(R) = +1$, d.v.s., enligt Eulers sats om isometriska avbildningar, den är en rotation. Rotationsaxeln hittar vi genom att lösa ekvationen $RX = X$, där $X = (x_1, x_2, x_3)^t$. Lösningen är

$$X = t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

vilket ger att rotationsaxeln är parallell med vektorn $(1, 1, 0)$. Rotationsvinkeln får vi om vi tar en vektor i planet $x_1 + x_2 = 0$ (det är det plan som är ortogonal mot rotationsaxeln och som går genom origo) t.ex. $v = (1, -1, 0)$ och verkar på den med R. Rotationsvinkeln motsvarar då vinkeln mellan v och $R(v) = (0, 0, -\sqrt{2})$. Man ser dock lätt att $v \cdot R(v) = 0$ så att de båda vektorer är ortogonala. Rotationsvinkeln måste då bli $\pi/2$.

7. Eftersom $P(\sin x) = \sin(x + \varphi) = \sin x \cos\varphi + \cos x \sin\varphi$ och $P(\cos x) = \cos(x + \varphi) = \cos x \cos\varphi - \sin x \sin\varphi$ har vi att P:s matris i basen $(\sin x, \cos x)$ är

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Eftersom $\det(A) = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \neq 0$ är A inverterbar och således P^{-1} finns och har matrisen

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$