Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel 011-363320

Tentamen i linjär algebra TNIU 75

2004-04-24 kl. 08.00—13.00

Jour: Krzysztof Marciniak, tel. 011-363317, Sasan Gooran, tel. 011-363277
Lösningarna finns på **www.itn.liu.se/∼krzma** from 2004-04-24 kl. 14.00.
Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift bedöms med 0-3p. För godkänt (3) krävs minst 8p samt minst 2 uppgifter bedömda 2p eller högre. För väl godkänd (4) respektive mycket väl godkänd (5) krävs 12 respektive 15 poäng. Inom parentes anges hur många poäng varje deluppgift är värd. Uppgifterna är *inte* sorterade efter svårighetsgrad.

1. a) Hur många lösningar kan ett system av linjära ekvationer ha? (1p)

   b) Lös ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

2. Ange alla matriser X som uppfyller följande ekvation: (3p)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

3. Beräkna projektionen av den räta linjen $l = (1+t, 1-t, 3t)$ på planet π: $2x - 3y + z = 3$ längs (dvs. parallellt med) vektorn $w = (1, 2, 0)$. (3p)

4. a) Definiera vad menas med att en avbildning $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ i rummet är linjär. (1p)

   b) Låt avbildningen $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara den symmetriska avbildningen av rummet $\mathbf{R}^3$ m.a.p origo, dvs. avbildningen F ges av

$$F(u) = -u$$

   för varje vektor u i rummet . Visa att F är linjär. (1p) Ange alla F:s egenvektorer med motsvarande egenvärden. (1p)

5. a) Ange en bas till nollrummet (1p) och en bas till värderummet (1p) till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

   b) Ange alla 3×1 matriser B (i.e. vektorer) för vilka ekvationen $AX = B$ har (minst) en lösning X. (1p)

6. Ange den parabel $y = ax^2 + bx + c$ som i minsta-kvadratmeningen passar bäst till följande uppsättning av mätpunkter (x_i, y_i): $(0,0)$, $(1,8)$, $(3,8)$, $(4,20)$. (3p)

7. Låt $P_2(\mathbf{R})$ vara ett rum av polynom av grad ≤ 2. Visa att $1, 1+x, 1+x+x^2$ är en bas i $P_2(\mathbf{R})$. (1p) Ange koordinaterna för polynomet $3x^2 - 7x + 4$ i denna bas. (2p)