Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningsförslag för tentamen i linjär algebra TNIU75
2004-04-24 kl. 08.00—13.00

1. a) Inga, exakt en eller oändligt många, se kap. 1 i boken.

   b) Med hjälp av den första ekvationen eliminerar vi x_1-termerna i de återstående ekvationerna. Resultatet blir
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \phantom{x_1 +{}} x_2 \phantom{{}+ x_3} - x_4 = 0 \\ \phantom{x_1 +{}} x_2 \phantom{{}+ x_3} - x_4 = 0 \end{cases}$$
   så att vi kan "stryka" den tredje ekvationen. Systemet har alltså en tvåparameterslösning. Sätter vi t.ex. $x_3 = s$, $x_4 = t$ får vi lösningen på formen $s(-1, 0, 1, 0) + t(-2, 1, 0, 1)$.

2. Från ekvationen följer att den sökta matrisen måste vara av typ 2×2. Ekvationen har formen $AX = B$ där
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$
   Eftersom $\det(A) = -2 \neq 0$ är matrisen A inverterbar och således har ekvationen entydig lösning
$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Den löpande punkten $(1 + t, 1 - t, 3t)$ på linjen l skär planet π när t uppfyller ekvationen
$$2(1 + t) - 3(1 - t) + 3t = 3$$
   dvs. när $t = \frac{1}{2}$. Detta insatt i l ger skärningspunkten P mellan l och π: $P = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Den sökta projektionen l' måste gå genom P. För att bestämma l' behövs alltså bara en punkt till som säkert ligger på l'. Den får vi om vi projicerar en godtycklig punkt från l (förutom P) - t.ex. $Q = (1, 1, 0)$ - på planet π parallell med w. Låt oss alltså dra en linje m genom Q som är parallellt med w. Linjen m har formen $m = (1 + 1 \cdot s, 1 + 2 \cdot s, 0 + 0 \cdot s) = (1 + s, 1 + 2s, 0)$, där s är m:s parameter. Linjen m skär planet π när $s = -1$, (visas som ovan) dvs. i punkten $Q' = (0, -1, 0)$. Vektorn $\overrightarrow{PQ'} = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ spänner upp den sökta projektionen l' och således får vi att
$$l' = P + r\,\overrightarrow{PQ'} = \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}r, \frac{1}{2} - \frac{3}{2}r, \frac{3}{2} - \frac{3}{2}r\right)$$
   där r är l':s parameter.

4. a) $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ är linjär om för varje par v, w av vektorer i rummet och varje par α,β av konstanter gäller att
$$F(\alpha v + \beta w) = \alpha F(v) + \beta F(w).$$

b) Vi har att $F(\alpha v + \beta w) = -(\alpha v + \beta w) = \alpha(-v) + \beta(-w) = \alpha F(v) + \beta F(w)$ vilket visar att F är linjär. Eftersom $F(u) = -u$ är varje vektor (förutom nollvektorn) i rummet en egenvektor med (samma för alla vektorer) egenvärde -1.

5. a) Vi kan tolka A som avbildning $A : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$. Nollrummet $N(A)$ till matrisen A är således ett underrum av $\mathbf{R}^4$. Det har vi redan beräknat i uppgiften 1 (!). Således, en bas för $N(A)$ består t.ex. av $(-1, 0, 1, 0)$ och $(-2, 1, 0, 1)$. Vidare, dimensionssatsen ger oss att $\dim(\mathbf{R}^4) = \dim N(A) + \dim V(A)$, så att $\dim V(A) = 2$. För att få en bas i $V(A)$ (som är ett underrum i $\mathbf{R}^3$) räcker det alltså att välja två linjärt oberoende kolonner i matrisen A, t.ex. $(1, 2, 3)$ och $(1, 3, 4)$.

   b) De vektorer B för vilka systemet $AX = B$ är lösbart m.a.p. X är precis de B som är element i $V(A)$, vilket är bara en omformulering av definitionen av $V(A)$.

6. Uppgiften leder till följande minstakvadratproblem:

$$AX \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix} \equiv B$$

   som saknar lösning i vanlig mening. Multiplicerar vi systemet från vänster med den transponerade matrisen A^t får vi systemet $A^t AX = A^t B$ eller, efter några mödosamma räkningar

$$\begin{pmatrix} 338 & 92 & 26 \\ 92 & 26 & 8 \\ 26 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 112 \\ 36 \end{pmatrix}$$

   som har entydig lösning $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{4}{3}$, $c = 2$. Således, den parabel som bäst approximerar våra mätpunkter är $y = \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$.

7. Vi måste visa att vektorerna $f_1 = 1, f_2 = 1 + x, f_3 = 1 + x + x^2$ är linjärt oberoende, ty då spänner de upp det *tredimensionella* rummet $P_2(\mathbf{R})$. Vi löser alltså systemet

$$\lambda_1 1 + \lambda_2(1 + x) + \lambda_3(1 + x + x^2) = 0$$

   med avseende på λ_i, eller, efter omskrivning

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + (\lambda_2 + \lambda_3)x + \lambda_3 x^2 = 0.$$

   Denna polynomekvation är ekvivalent med det linjära systemet

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \end{cases}$$

   vilket enbart har trivial lösning $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Således, vektorerna f_1, f_2, f_3 är linjärt oberoende och utgör alltså (enligt ovan) en bas.

Vidare, basbytematrisen från standardbasen $e = (1, x, x^2)$ till basen f är

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(koefficienterna av utveckling av f_j i basen e utgör j-te kolonn i matrisen T). Vektorn $3x^2 - 7x + 4$, som i standardbasen e har koordinaterna $(4, -7, 3)$ kommer i den nya basen $f = (1, 1 + x, 1 + x + x^2)$ att ha koordinaterna

$$T^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix},$$

vilket stämmer ty $11(1) - 10(1+x) + 3(1+x+x^2) = 11 - 10 - 10x + 3 + 3x + 3x^2 = 4 - 7x + 3x^2$.