Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tel. 011-363320
e-mail: krzma@itn.liu.se

Lösningsförslag för tentamen i linjär algebra TNIU75
2004-03-08 kl. 08.00—13.00

1. a) T.ex. $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ och $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

   b) De punkter som ligger i samtliga plan är precis de som löser ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 & = 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 & = -1 \end{cases}$$

Gausselimination leder snabbt till att det ovanstående systemet är ekvivalent med

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = 1 \\ \quad -3x_2 - 3x_3 & = 0 \\ \qquad\qquad 5x_3 & = -2 \end{cases}$$

vilket snabbt ger att $x_1 = 3/5$, $x_2 = 2/5$ samt att $x_3 = -2/5$. Således våra tre plan skär varandra i punkten $(3/5, 2/5, -2/5)$.

2. Avbildningen F är linjär eftersom för godtyckliga vektorer u och v och godtyckliga konstanter α och β gäller att

$$F(\alpha u + \beta v) = e_1 \times (\alpha u + \beta v) = \alpha e_1 \times u + \beta e_1 \times v = \alpha F(u) + \beta F(v),$$

p.g.a. egenskaper av vektormultiplikation. Vidare har vi att $F(e_1) = e_1 \times e_1 = 0$, $F(e_2) = e_1 \times e_2 = e_3$, $F(e_3) = e_1 \times e_3 = -e_2$ (höger ON-bas!) så att avbildningsmatrisen blir

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Således, bilden av $e_1 - 2e_2 + 3e_3$ blir (i basen e) lika med AX där $X = (1, -2, 3)^T$, dvs $(0, -3, -2)^T$ i.e.

$$F(e_1 - 2e_2 + 3e_3) = -3e_2 - 2e_3.$$

Samma resultat kan här lätt räknas direkt om man utnyttjar att F är linjär:

$$F(e_1 - 2e_2 + 3e_3) = F(e_1) - 2F(e_2) + 3F(e_3) = 0 - 2e_3 + 3(-e_2),$$

enligt ovan.

3. a) se boken, kap. 8.

b) Eftersom $u = (1, 2, 3)$ avbildas på $-(1, 2, 3)$ så är u normal till speglingsplanet. Det betyder att speglingsplanet har ekvationen $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$. Vidare, om speglingen betecknas med S, har vi att spegelbilden $S(e_i)$ av basvektorn e_i ges av

$$S(e_i) = e_i - 2\frac{e_i \cdot u}{u \cdot u}u$$

(eller hur?). Sätter vi in alla e_i i denna formeln så får vi att

$$S(e_1) = (1, 0, 0) - 2\frac{1}{14}(1, 2, 3) = \frac{1}{7}(6, -2, -3)$$

och på samma sätt får vi att $S(e_2) = \frac{1}{7}(-2, 3, -6)$ och $S(e_3) = \frac{1}{7}(-3, -6, -2)$. Således, avbildningsmatrisen blir

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Vi måste visa att vektorerna f_1, f_2, f_3 är linjärt oberoende, ty om de är linjärt oberoende så utgör de en bas i $\mathbf{R}^3$ (de spänner upp $\mathbf{R}^3$ då). Vi löser alltså ekvationen

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$$

med avseende på λ_i. Detta ger att

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)e_1 + (\lambda_2 + \lambda_3)e_2 + \lambda_3 e_3 = 0;$$

men eftersom vektorerna e_1, e_2, e_3 är linjärt oberoende (de utgör ju en bas) så måste vi ha att

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \end{cases}$$

vilket har enbart trivial lösning $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Således, vektorerna f_1, f_2, f_3 är linjärt oberoende.

Basbytematrisen från basen e till basen f är

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(koefficienterna av utveckling av f_j i basen e utgör j-te kolonn i matrisen T). Om vektorn u har koordinaterna (x_1, x_2, x_3) i basen e då har den i basen f koordinaterna (y_1, y_2, y_3) där

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

i.e. sambandet blir: $x_1 = y_3$, $x_2 = y_2 + y_3$, $x_3 = y_1 + y_2 + y_3$ som är lätt att lösa ut med avseende på y_i: $y_1 = -x_2 + x_3$, $y_2 = -x_1 + x_2$,$y_3 = x_1$. På köpet får vi T^{-1} (varför?):

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidare, $2e_2 - f_3 = 2e_2 - (e_1 + e_2 + e_3) = -e_1 + e_2 - e_3$, vilket medför att $2e_2 - f_3$ har koordinaterna $(-1, 1, -1)$ i basen e. Till sist, $e_2 = f_2 - e_3 = f_2 - f_1$ och således $2e_2 - f_3 = 2(f_2 - f_1) - f_3 = -2f_1 + 2f_2 - f_3$ så att $2e_2 - f_3$ har koordinaterna $(-2, 2, -1)$ i basen f.

5. Uppgiften leder till följande minstakvadratproblem:

$$AX \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix} \equiv B$$

som alltså saknar lösning i vanlig mening. Multiplicerar vi systemet från vänster med den transponerade matrisen A^t får vi systemet $A^tAX = A^tB$ eller, efter enkla räkningar

$$\begin{pmatrix} 26 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 112 \\ 36 \end{pmatrix}$$

som har entydig lösning $a = 4$, $b = 1$. Således, den linje som bäst approximerar våra mätpunkter är $y = 4x + 1$. Rita gärna en figur så att du kan själv se att det stämmer!

6. a) se boken, sats 16 sid. 254.

   b) Det är faktiskt lättare att bestämma α så att $\dim V(F) = 3$ (då kommer, enligt *dimensionssatsen*, $\dim N(F)$ att vara lika med 1). Vi vet att värderummet $V(F)$ ges av linjära höljet av samtliga kolonner K_1, K_2, K_3, K_4 i matrisen $A = (K_1, K_2, K_3, K_4)$. Vi ser lätt att $K_4 = K_3 - K_1$ så att egentligen $V(F) = [K_1, K_2, K_3]$. Alltså, $\dim V(F)$ blir 3 endats om kolonnerna K_1, K_2, K_3 är linjärt oberoende, alltså om $\det(K_1, K_2, K_3) \neq 0$. Men

$$\det(K_1, K_2, K_3) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \alpha + 7,$$

   så att $\dim V(F) = 3$ så snart $\alpha \neq -7$.

7. F är linjär ty en linjär kombination (med konstanta koefficienter) av linjära avbildningar (alla deriveringsoperatorer är ju linjära) är linjär. Låt oss beteckna standardbasen $(1, x, x^2)$ i $P_2(\mathbf{R})$ med (f_1, f_2, f_3). Vi har att $F(f_1) = (1)'' + 2(1)' + 1 = 1 = f_1$. På samma sätt får man att

$$\begin{aligned} F(f_2) &= 2f_1 + f_2 \\ F(f_3) &= 2f_1 + 4f_2 + f_3 \end{aligned}$$

Det betyder att i standardbasen har avbildningen F matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och eftersom $\det(A) = 1 \neq 0$ får vi att F är inverterbar (enligt sats 15 sid. 253). Vidare, eftersom $F(f_1) = f_1$ måste vi ha att $f_1 = F^{-1}(f_1)$. Enligt samma princip, om $F(f_2) = 2f_1 + f_2$ då är $f_2 = F^{-1}(2f_1 + f_2) = 2F^{-1}(f_1) + F^{-1}(f_2)$ /F är ju linjär/ $= 2f_1 + F^{-1}(f_2)$. Ur detta kan vi snabbt räkna ut $F^{-1}(f_2)$: $F^{-1}(f_2) = -2f_1 + f_2$. På samma sätt får vi att $F^{-1}(f_3) = 6f_1 - 4f_2 + f_3$. Naturligtvis kan man även beräkna A^{-1} för att få detta, men ovanstående metod är snabbare. Det återstår alltså att beräkna $F^{-1}(ax^2 + bx + c)$:

$$\begin{aligned} F^{-1}(ax^2 + bx + c) &= aF^{-1}(x^2) + bF^{-1}(x) + cF^{-1}(1) = \\ &= a(6f_1 - 4f_2 + f_3) + b(-2f_1 + f_2) + cf_1 = \\ &= ax^2 + (-4a + b)x + 6a - 2b + c, \end{aligned}$$

där vi utnyttjar linjäriteten hos F^{-1} och uttrycken för $F^{-1}(f_j)$ som vi fick ovan.