Efterarbete Minstakvadratmetoden

1. Eftersom $\det A = 0 \Leftrightarrow a = -1, 3$, så har systemet enligt Sats 8.17 en entydig lösning för $a \neq -1, 3$. För $a = 1$ får vi den entydiga lösningen $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Om vi för detta värde på $a = 1$ bestämmer en minstakvadratlösning genom att lösa normalekvationen $A^t A\boldsymbol{x}_2 = A^t\boldsymbol{b}$ så får vi återigen samma lösning, dvs $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$, ty $A^t(A\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{b}) = A^t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$.

2. För $a = -1$ får vi parameterlösningen $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Och löser vi normalekvationen $A^t A\boldsymbol{x}_2 = A^t\boldsymbol{b}$ för $a = -1$, så får vi minstakvadratlösningen $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_3$.

3. För att bestämma ekvationen för ett plan behöver vi 3 punkter. Har vi fler än 3 punkter och vi vill anpassa ett plan till dessa punkter enligt minstkvadratmetoden så kan vi göra på följande sätt. Antag att vi vill bestämma konstanterna a, b och c så att vi anpassar planet $z = ax + by + c$ till följande mätdata

x	x_1	x_2	x_3	x_4
y	y_1	y_2	y_3	y_4
z	z_1	z_2	z_3	z_4

Vi sätter in mätdata i planets ekvation och får

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c &= z_1 \\ ax_2 + by_2 + c &= z_2 \\ ax_3 + by_3 + c &= z_3 \\ ax_4 + by_4 + c &= z_4 \end{cases}$$

som på matrisform kan skrivas

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ z_2 \\ x_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Normalekvationen $A^t A\boldsymbol{x} = A^t\boldsymbol{b}$ ger en lösning på ett plan anpassat enligt minstakvadratmetoden.