Efterarbete Euklidiska rum

1. En allmän skalärprodukt har formen

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) &= a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{13}x_1y_3 \\ &+ a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + a_{23}x_2y_3 \\ &+ a_{23}x_3y_1 + a_{23}x_3y_2 + a_{33}x_3y_3\end{aligned}$$

a) Första villkoret är att $\varphi(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v})$ ska symmetrisk, dvs alla koefficienter som har samma kombination av index måste vara lika, dvs $a_{ij} = a_{ji}$. Detta betyder att $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$ och $a_{23} = a_{32}$. Om vi samlar dessa så får vi

$$\varphi(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}) = a_{11}x_1y_1 + 2a_{12}x_1y_2 + 2a_{13}x_1y_3 + a_{22}x_2y_2 + 2a_{23}x_2y_3 + a_{33}x_3y_3$$

b) Andra villkoret är att $\varphi(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v})$ ska vara positiv definit, dvs om $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, så ska $\varphi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})$ alltid vara positiv, dvs

$$\varphi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 > 0.$$

Här kan vi välja koefficienterna a_{12}, a_{13} och a_{23} på många olika sätt så att $\varphi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) > 0$.

Om vi nu väljer $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$ och $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, så får vi standard-skalärprodukten

$$(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Låt oss göra det lite enklare för oss och väljer $a_{11} = 2$, $a_{22} = 3$, $a_{33} = 4$ och $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, så får vi skalärprodukten

$$\varphi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3.$$

2. a) Med hjälp av $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ och $\boldsymbol{v}_3$ och G-S process kan vi bestämma en ON-bas $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ och $\boldsymbol{e}_3$ för W.

i) Låt $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{v}_1$ och sätt $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{1}{||\boldsymbol{f}_1||}\boldsymbol{f}_1$.

ii) Låt $\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2|\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1$ och sätt $\boldsymbol{e}_2 = \dfrac{1}{||\boldsymbol{f}_2||}\boldsymbol{f}_2$.

iii) Låt $\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3|\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{v}_3|\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2$ och sätt $\boldsymbol{e}_3 = \dfrac{1}{||\boldsymbol{f}_3||}\boldsymbol{f}_3$.

b) Eftersom $\dim W = 3$, så är $\dim W^\perp = 2$. Låt $\boldsymbol{e}_4$ och $\boldsymbol{e}_5$ vara ON-basen för $W^\perp$. Vi ska alltså fylla ut basen $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ och $\boldsymbol{e}_3$ för W med ON-basen $\boldsymbol{e}_4$, $\boldsymbol{e}_5$ för $W^\perp$ för en ON-bas $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_5)$ för hela $\mathbf{E}^5$. För att bestämma $\boldsymbol{e}_4$ och $\boldsymbol{e}_5$ söker vi bestämma vektorer $\boldsymbol{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^t$ som är ortogonal mot W, dvs

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_1 &= 0 \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_2 &= 0 \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_3 &= 0 \end{cases}$$

Systemet har 5 obekanta x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 och 3 ekvationer, detta betyder att vi får $5 - 3 = 2$-parameterslösning på formen $\boldsymbol{v} = s\boldsymbol{v}_3 + t\boldsymbol{v}_4$. Vi använder G-S process på $\boldsymbol{v}_3$ och $\boldsymbol{v}_4$. Observera att $\boldsymbol{v}_3$ och $\boldsymbol{v}_4$ är redan ortogonala mot $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ och $\boldsymbol{v}_3$.

i) Låt $\boldsymbol{f}_4 = \boldsymbol{v}_4$ och sätt $\boldsymbol{e}_4 = \dfrac{1}{||\boldsymbol{f}_3||}\boldsymbol{f}_4$.

ii) Låt $\boldsymbol{f}_5 = \boldsymbol{v}_5 - (\boldsymbol{v}_5|\boldsymbol{e}_4)\boldsymbol{e}_4$ och sätt $\boldsymbol{e}_5 = \dfrac{1}{||\boldsymbol{f}_5||}\boldsymbol{f}_5$.