Efterarbete Linjära rum

1. Förutom de rum som tas upp i boken så kan vi här ge ytterligare exempel på ett linjärt resp. ett icke-linjärt rum. Rummet av alla symmetriska matriser av ordning n är linjärt, ty a) summan av två symmetriska matriser är en ny symmetrisk matris och
b) multiplicerar vi en symmetrisk matris med ett reellt tal så får vi återigen en symmetrisk matris.
Rummet av alla ortogonala matriser är inte linjärt, ty varken a) summan av två ortogonala matriser eller b) multiplikation av en ortogonal matris med ett reellt tal är en ny ortogonal matris.

2. Alla linjer i W_1 som går igenom origo är underrum i W_1. Dessa linjer har därmed en riktningsvektor som är ortogonal mot W_1:s normal. T.ex. så är linjen L: $t(1,-1,0)^t$ ett underrum i W_1.

3. Alla linjer i $\mathbf{R}^2$ som går igenom origo är underrum. T.ex. linjen $y = x$ är ett underrum men inte $y = x + 1$.

4. Enligt Exempel 10.35 så spänner M={$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$} upp hela $\mathbf{R}^4$. I samma exempel ser vi att den matris som har $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ och $\boldsymbol{v}_4$ som kolonner har en determinant skilt från 0. Då följer av Sats 8.17 att vektorerna $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ och $\boldsymbol{v}_4$ är linjärt oberoende. Alltså är M en bas för $\mathbf{R}^4$. Detta betyder att varje vektor i $\mathbf{R}^4$ är en linjärkombination i M. T.ex. vektorn $\boldsymbol{v} = (4,0,0,0)^t$ är en linjärkombination, ty den är summan av alla $\boldsymbol{v}$:na. Eftersom M är en bas så finns ingen vektor som inte är en linjärkombination i M.

5. En mängd M med färre antal vektorer än fyra kommer inte att spänna upp R4. T.ex. spänner M={$(1,0,0,0)^t$, $(0,1,0,0)^t$, $(0,0,1,0)^t$} inte upp $\mathbf{R}^4$.
Det är inte heller säkert att en mängd M med fler än 4 vektorer spänner upp $\mathbf{R}^4$. T.ex. spänner M={$(1,0,0,0)^t$, $(0,1,0,0)^t$, $(0,0,1,0)^t$, $(1,1,0,0)^t$, $(0,1,1,0)^t$} inte upp $\mathbf{R}^4$.

6. Mängden {$(1,0,0,-1)^t$, $(1,0,-1,0)^t$, $(1,-1,0,0)^t$, $(1,1,1,1)^t$} spänner upp $\mathbf{R}^4$, ty den är linjärt oberoende.
Mängden {$(1,0,0,-1)^t$, $(1,0,-1,0)^t$, $(1,-1,0,0)^t$, $(1,1,1,1)^t$, $(1,2,3,4)^t$, $(5,6,7,8)^t$} spänner också upp $\mathbf{R}^4$ trots att den är linjärt beroende.

7. Antag att M_1, M_2 och M_3 är mängder i ett linjärt rum V. Enligt uppgift så består M_3 av 3 linjärt oberoende vektorer, vilket betyder att dimensionen för V är minst 3.
a) Om dim V = 3 (dvs V=$\mathbf{R}^3$) så är M_1 en rät linje genom origo, M_2 ett plan genom origo och M_3 hela V.
b) Om dim V = 4 (dvs V=$\mathbf{R}^4$) så är M_1 ett underrum med dim = 1, M_2 ett underrum med dim = 2 och M_3 ett underrum med dim = 3, dvs ett hyperplan som har en ekvation.
c) Om dim V = 5 (dvs V=$\mathbf{R}^4$) så är M_1 ett underrum med dim = 1, M_2 ett underrum med dim = 2 och M_3 ett underrum med dim = 3.
d) Om dim V = 6 eller högre så är det som i fallet c).

8. Enligt Exempel 10.35 så spänner M={$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$} upp $\mathbf{R}^4$ och enligt Exempel 10.47 så är samma mängd M linjärt oberoende. Alltså är M en bas för $\mathbf{R}^4$ och alla vektorer är linjärkombinationer i M.

9. Det finns oändligt många sätt att finna en linjärt oberoende mängd $M=\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ på. Låt oss här utgå från mängden M i Exempel 10.47. Vi bildar nya vektorer på följande sätt

$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (1,1,1,1)^t + (1,-1,1,-1)^t = (2,0,2,0)^t$

$\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 = (1,-1,1,-1)^t + (1,1,-1,-1)^t = (2,0,0,-2)^t$

$\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4 = (1,1,-1,-1)^t + (1,-1,-1,1)^t = (2,0,-2,0)^t$

$\boldsymbol{w}_4 = \boldsymbol{v}_4 + v_1 = (1,-1,-1,1)^t + (1,1,1,1)^t = (2,0,0,2)^t$

då kan man visa att $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4\}$ är en linjärt oberoende mängd (Visa detta!).