Efterarbete Matriser och Determinanter

1. Vi löser Exempel 6.26 där $n = 3$ och A är en 3x3-matris. Vi söker alltså en 3x3-matris B så att $AB = BA = E$. Detta betyder att vi har 9 obekanta element att bestämma i matrisen B. Om vi istället skriver matrisen B på formen $B = (X1\ X2\ X3)$ där $X1$, $X2$ och $X3$ är kolonnerna i B, behöver vi lösa systemet $AB = A(X1\ X2\ X3) = E$. Om vi dessutom skriver enhetsmatrisen på kolonnform $E = (E1\ E2\ E3)$, så behöver vi lösa systemet $A(X1\ X2\ X3) = (E1\ E2\ E3)$. Eftersom varje kolonn i vänstra ledet ska vara lika med motsvarande kolonn i högra ledet behöver vi lösa tre mindre ekvationssystem $AX1 = E1$, $AX2 = E2$ och $AX3 = E3$. Vi ser också att det är samma koefficientmatris i alla dessa tre ekvationssystem så att när vi använder Gausselimination får vi samma radoperationer. Detta betyder att vi kan lösa alla tre systemen samtidigt genom att ställa alla tre högerleden bredvid varandra i ett stort ekvationssystem $(A \mid E1\ E2\ E3) = (A \mid E)$.
Om vi lyckas få enhetsmatrisen i vänstra ledet så har vi lyckats lösa ut alla obekanta kolonnerna $X1$, $X2$ och $X3$ i B och dessa återges i högra ledet, dvs $(E \mid X1\ X2\ X3) = (E \mid B)$. Vi döper då om B till $A^{(-1)} = (X1\ X2\ X3)$.

2. Anta att ekvationssystemet $Ax = b$ har två lösningar som vi kallar $x1$ resp. $x2$, $Ax1 = b$ och $Ax2 = b$ Om vi låter $x3$ vara en linjärkombination av $x1$ och $x3$, t.ex., $x3 = x1/2 + x2/2$ så får vi att:
$A(x3) = A(x1/2 + x2/2) = A(x1/2) + A(x2/2) =Ax1/2 + Ax2/2 = b/2 + b/2 = b$,
dvs $x3$ är också en lösning till systemet $Ax = b$. Detta betyder att så fort ett system har två lösningar så har systemet oändligt många lösningar eftersom varje linjärkombination $x = t\, x1 + (1-t)x2$, t är ett godtyckligt reellt tal, är också en lösning.

3. Om ett system $Ax = b$ är lösbart så har det två typer av lösningar som kan kombineras till en allmän lösning xA. Den första lösningen xh kallas den homogena lösningen och den löser samma system fast med högerledet 0, dvs systemet $A(xh) = 0$. Om vi nu multiplicerar den homogena lösningen xh med ett reellt tal t så får vi en ny vektor $t\, xh$ som också är en lösning, ty $A(t\, xh) = t\, A(xh) = 0$.
Den andra lösningen xp kallas den partikulära lösningen och löser systemet med högra ledet b, dvs $A(xp) = b$. Om högra ledet b ändras till ett annat högerled så ändras också lösningen xp, dock ändras inte xh. Den allmänna lösningen xA till systemet $Ax = b$ kan därmed skrivas som en speciell linjärkombination $xA = xp + t\, xh$.

4a. Om matrisen A är inverterbar så har systemet $Ax = b$ en unik lösning $x = A^{(-1)}b$.
4b. Om vi undersöker linjärt beroende hos vektorerna u, v och w så behöver vi enligt definitionen lösa systemet:

$$\text{lambda1 } u + \text{lambda2 } v + \text{lambda3 } w = 0$$

som på matrisform kan skrivas

$$(u\ v\ w) \text{ gånger } (\text{lambda1}, \text{lambda2}, \text{lambda3})^t = 0$$

Om vi låter matrisen $A =(u\ v\ w)$ och vektorn lambda = (lambda1, lambda2, lambda3)^t så får vi systemet A gånger lambda = 0. Om A har invers (om determinanten för A är ej noll) kan systemet lösas som lambda = $A^{(-1)}0 = 0$, dvs alla lambda1 = lambda2 = lambda3 = 0 och därmed är vektorerna u, v och w linjärt oberoende.

5 Ett exempel på en symmetrisk och ortogonal matris finns i Exempel 6.37. Vi kan här ange alla sådana 2x2-matriser. Låt A vara en 2x2-matris med elementen a och b i första raden samt c och d i andra raden. Om A ska vara symmetrisk så måste b = c. Om A ska vara ortogonal så måste raderna eller kolonner vara 1) ortogonala: d = -a,
2) ha längd 1: $a^2 + b^2 = 1$. Matrisen A har alltså elementen a = cos t, b = sin t, c = sin t och d = -cos t. (Observera att A kan också ha elementen a = sint och b = cost, c och d väljs därefter).